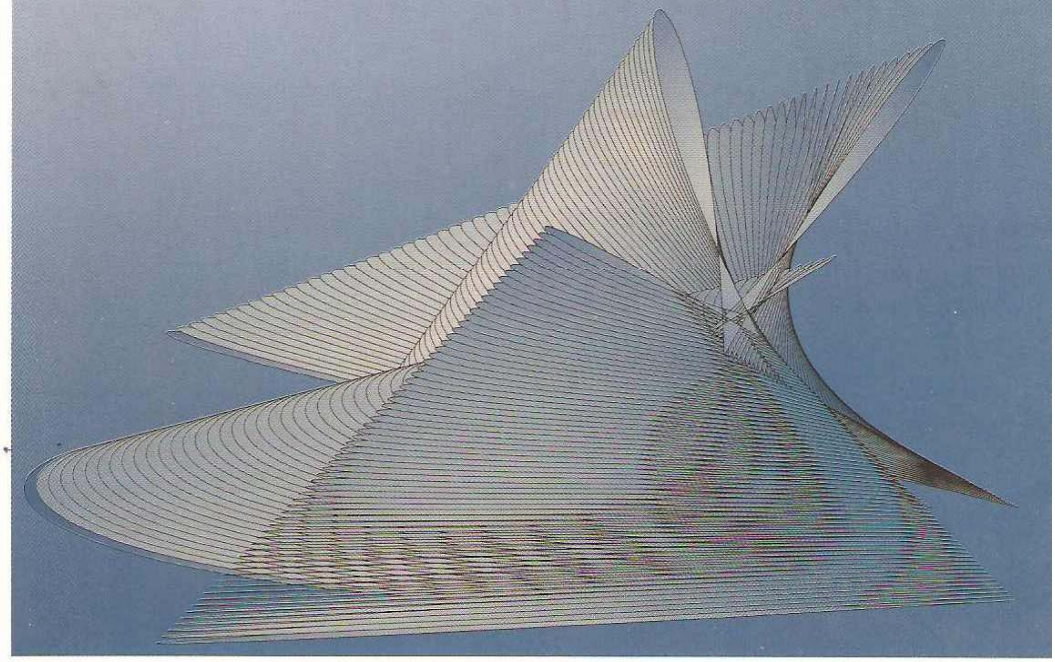
Carte universitară

VASILE SZOLGA
ADRIANA-MARIA SZOLGA

MECANICA TEORETICĂ

NOTE DE CURS ŞI ÎNDRUMĂTOR DE SEMINAR PARTEA I



CONSPRESS BUCUREŞTI

PROF.DR.ING. VASILE SZOLGA

ING. ADRIANA-MARIA SZOLGA

MECANICA TEORETICĂ

NOTE DE CURS ŞI ÎNDRUMĂTOR DE SEMINAR

PARTEA I

- STATICA PUNCTULUI MATERIAL, A SOLIDULUI RIGID ŞI A SISTEMELOR DE CORPURI
- CINEMATICA PUNCTULUI

2003

Cuprins.

Capitolul 1. Introducere

1.1.Obiectul cursului 1
1.2.Noțiuni fundamentale în mecanică 2
1.3.Principiile mecanicii teoretice 3
1.4.Modele teoretice şi schematizări 5

STATICA

Capitolul 2. Sisteme de forțe

2.1.Generalități 7
2.2.Forța 7
2.3.Proiecția forței pe o axă. Componenta forței pe direcția unei axe 9
2.4.Compunerea a două forțe concurente 10
2.5.Forța în sistem cartezian 12
2.6.Rezultanta unui sistem de forțe concurente. Teorema proiecțiilor 14
2.7.Exemplificări 16
2.8.Momentul unei forțe în raport cu un punct 21
2.9.Momentul forței în raport cu originea sistemului de referință cartezian 24
2.10.Exemplificări 25
2.11.Momentul unei forțe în raport cu o axă 26
2.12.Exemplificări 29
2.13Cuplu de forțe 32
2.14.Teorema lui Varignon 33
2.15.Reducerea unei forțe într-un punct 34
2.16.Reducerea unui sistem de forțe într-un punct 35

2.17.Exemplificări 37
2.18.Invarianții sistemelor de forțe. Moment minim, axă centrală 38
2.19.Cazuri de reducere 41
2.20.Exemplificări 44
2.21.Teorema lui Varignon 51
2.22.Sisteme de forțe coplanare 52
2.23.Exemplificări 54
2.24.Sisteme de forțe paralele. Centrul forțelor paralele 56
Capitolul 3. Centre de greutate
3.1.Introducere 62
3.2.Centre de greutate 62
3.3.Momente statice 64
3.4.Centre de greutate pentru corpuri omogene 66
3.5.Centre de greutate pentru corpuri compuse 68
3.6.Centre de greutate pentru corpuri simple uzuale 71
3.7.Exemplificări 76
3.8.Teoreme Pappus Guldin 82
Capitolul 4. Statica punctului material
4.1.Introducere 85
4.2.Echilibrul punctului material liber 86
4.3.Exemplificări 87
4.4.Legături. Axioma legăturilor 89
4.5.Echilibrul punctului material cu legături ideale 92
4.6.Exemplificări 94
4.7.Legile frecării de alunecare. Echilibrul punctului material cu legături cu frecare 95
4.8.Exemplificări 98
Capitolul 5. Statica solidului rigid
5.1.Introducere 100
5.2.Echilibrul solidului rigid liber 102
5.3.Legăturile ideale ale solidului rigid în problema plană 106
5.4.Corp static determinat 111
5.5.Încărcări 113

5.6.Etapele determinării reacţiunilor din legăturile unui corp static determinat 117
5.7.Exemplificări 118
Capitolul 6. Sisteme de corpuri rigide
6.1.Introducere 123
6.2.Teoreme de echilibru 125
6.3Sisteme static determinate 128
6.4Metoda echilibrului corpurilor componente 131
6.5.Exemplificări 132
6.6Unităţi structurale 138
6.7.Metoda solidificării 141
6.8.Exemplificări 141
6.9.Metoda mixtă 143
6.10.Exemplificări 146
6.11.Metoda echilibrului părţilor 148
6.12.Exemplificări 149
6.13.Folosirea simetriei în rezolvarea sistemelor 152
6.14.Exemplificări 155
Capitolul 7. Grinzi cu zăbrele plane
7.1.Introducere 162
7.2Ipoteze simplificatoare 164
7.3.Notaţii, denumiri, convenţii de semn şi sens 166
7.4.Condiţia de determinare statică 168
7.5.Metoda izolării nodurilor 169
7.6.Exemplificări 172
7.7.Noduri cu încărcare particulară 179
7.8.Metoda secţiunilor 180
7.9.Exemplificări 181
CINEMATICA
Capitolul 8. Cinematica punctului material
8.1.Introducere 185
8.2.Poziţia punctului. Traiectorie 186
8.3.Viteza şi acceleraţia 188
8.4.Cinematica punctului în coordonate carteziene 190
8.5.Cinematica punctului în coordonate cilindrice. Coordonate polare 193
8.6.Cinematica punctului în triedrul lui Frenet 197

Capitolul 1. Introducere

1.1.Obiectul cursului.

Mecanica poate fi definită ca fiind acea ştiinţă care descrie şi elaborează condiţiile de echilibru sau de mişcare ale corpurilor materiale sub acţiunea forţelor. Mecanica poate fi divizată, în funcţie de obiectul studiului în trei mari părţi: mecanica corpurilor nedeformabile (mecanica solidului rigid), mecanica corpurilor deformabile (rezistenţa materialelor, statica construcţiilor, elasticitate) şi mecanica fluidelor.

*Mecanica corpurilor nedeformabile se poate considera împărţită în trei mari părţi: **statica, cinematica şi dinamica.** Statica este acea parte a mecanicii teoretice care se ocupă cu studiul transformării sistemelor de forţe şi a condiţiilor de echilibru ale corpurilor. Cinematica este partea mecanicii care studiază mişcarea mecanică a corpurilor fără să ţină seama de masele lor şi nici de forţele care acţionează asupra lor, adică studiază mişcarea din punct de vedere geometric, mişcarea pură. Dinamica este partea mecanicii care se ocupă cu studiul mişcării corpurilor luând în considerare atât masele loc cât şi forţele care acţionează asupra lor. În toate aceste definiţii corpurile se consideră a fi perfect rigide, adică nedeformabile. Este cunoscut faptul că corpurile reale sunt deformabile sub acţiunea încărcărilor la care sunt supuse. Dar aceste deformaţii sunt în general foarte mici şi în consecinţă produc efecte nesemnificative asupra condiţiilor de echilibru sau cele de mişcare.*

Mecanica este o ştiinţă a naturii datorită faptului că se ocupă de studiul unor fenomene fizice naturale. Mulţi consideră mecanica a fi o disciplină legată de ştiinţele matematice datorită faptului că ea se dezvoltă pe baza unor relaţii şi teoreme care în general se demonstrează matematic. Pe de altă parte, mecanica nu este o ştiinţă abstractă sau o ştiinţă pură, ea este o ştiinţă aplicată.

Mecanica studiază cea mai simplă formă de mişcare a materiei şi anume cea numită ***mişcare mecanică.***

Mişcarea mecanică se defineşte ca fiind acel fenomen în care un corp , sau o parte dintr-un corp îşi modifică poziţia în raport cu un alt corp considerat ca reper. În acest context repausul este un caz particular al fenomenului de mişcare.

1.2.Noţiuni fundamentale în mecanică

Mecanica teoretică, Newtoniană, foloseşte trei noţiuni fundamentale: ***spaţiul, timpul şi masa.*** *Aceste trei noţiuni, sau mărimi fundamentale se consideră a fi absolut independente una în raport cu celelalte două. Ele se numesc fundamentale datorită faptului că nu pot fi exprimate cu alte noţiuni mai simple şi vor forma cadrul mintal de referinţă pentru studiul mecanicii teoretice.*

Noţiunea de ***spaţiu*** *este asociată cu noţiunea de poziţie, De exemplu poziţia unui punct P poate fi definită cu ajutorul a trei lungimi măsurate pe direcţii date, în raport cu un punct de referinţă. Aceste trei lungimi sunt cunoscute sub denumirea de coordonatele punctului P. Spaţiul se mai asociază, de asemenea, şi cu noţiunea de întindere sau mărime a corpurilor.* ***Spaţiul*** *în mecanica teoretică este considerat a fi spaţiul real în care se desfăşoară fenomenele naturale şi având următoarele proprietăţi:* ***infinit, tridimensional, continuu, omogen şi izotrop.*** *Astfel definit spaţiul este spaţiul euclidian tridimensional care permite realizarea figurilor asemenea şi de asemenea realizarea calculului infinitezimal.*

În definirea unui fenomen mecanic însă nu ajunge, de obicei, numai noţiunea de spaţiu, adică definirea poziţiei şi a mărimii corpurilor în spaţiu. Fenomenele mecanice au o anumită durată şi se succed într-o anumită ordine. Legat de aceste noţiuni, durată şi succesiune, mecanica teoretică consideră ca noţiune fundamentală ***timpul*** *cu proprietăţile:* ***infinit, unidimensional, continuu, omogen şi ireversibil.*** *Timpul scurs între două evenimente se numeşte interval iar limita dintre două intervale se va numi moment.*

Noţiunea de ***masă*** *este folosită pentru a caracteriza şi a compara corpurile în timpul anumitor fenomene.* ***Masa*** *în mecanica teoretică, este măsura inerţiei corpurilor în mişcarea de translaţie şi va reprezenta* ***cantitatea de substanţă*** *conţinută în corp, constantă în timpul întregului fenomen studiat.*

Pe lângă aceste trei noțiuni fundamentale, mecanica mai folosește o serie de noțiuni derivate caracteristice, în general, fiecărei părți din mecanică. Aceste noțiuni le vom numi noțiuni de bază pentru fiecare parte a mecanicii și ele vor fi definite în cadrul părții respective. Pentru partea care se numește ***Statică*** *noțiunile derivate sunt* ***forța și momentul forței****, pentru partea din mecanică numită* ***Cinematică*** *noțiunile derivate sunt* ***viteza și accelerația****, iar pentru ultima parte numită* ***Dinamica*** *aceste noțiuni sunt:* ***impulsul, momentul cinetic, energia cinetică și lucrul mecanic.***

1.3.Principiile mecanicii teoretice.

La baza mecanicii teoretice stau o serie de principii (legi sau axiome) verificate experimental sau intuitiv și care nu pot fi demonstrate teoretic. Aceste principii au fost formulate de către Sir Isaac Newton în anul 1687 în lucrarea „Phylosophiae naturalis principia mathematica". Cu unele foarte mici precizări acestea sunt folosite sub aceeași formă și astăzi, în anumite cazuri oamenii de știință mai adaugă unele principii pentru a preciza comportarea unui corp indeformabil și de asemenea unele corolare enunțate de Newton sunt formulate ca principii independente. În acest curs vom prefera să prezentăm sub această ultimă formă principiile fundamentale ale mecanicii teoretice.

Principiul inerției *are următorul enunț:* ***un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.*** *Trebuie făcută precizarea că Newton, atunci când se referă la corp , are în vedere punctul material, adică un corp foarte mic cu dimensiunile neglijabile. De asemenea enunțul poate să se refere și la un corp în accepție proprie a cuvântului dacă în enunț se precizează că este vorba de o mișcare de* ***translație*** *rectilinie și uniformă. Acest principiu nu exclude faptul că asupra corpului pot acționa forțe, dar aceste forțe trebuie să fie în* ***echilibru****. Despre acest lucru însă vom vorbi într-unul din capitolele următoare. Principiul a fost enunțat de Newton ca fiind prima lege a mișcărilor* ***(lex prima)****.*

Principiul acțiunii forței *se enunță:* ***dacă asupra unui corp acționează o forță, aceasta imprimă corpului o accelerație proporțională cu ea , de aceeași direcție și sens cu ea.*** *Newton a stabilit în concordanță cu acest principiu* ***(lex secunda)*** *legea fundamentală a mecanicii:*

$$\overline{F} = m\overline{a}$$

Principiul paralelogramului *a fost enunțat de Newton ca primul corolar al celei de a doua legi și este cunoscut și sub numele de* ***principiul independenței acțiunii forțelor*** *sau* ***regula paralelogramului.*** *Acest principiu are enunțul:* ***dacă asupra unui corp acționează două forțe efectul acestora se poate înlocui cu o singură forță având ca mărime, direcție și sens diagonala paralelogramului având ca laturi cele două forțe.*** *Acest principiu postulează de fapt* ***principiul suprapunerii efectelor.*** *Asupra regulii paralelogramului însă vom mai reveni în capitolul care se referă la adunarea (sau compunerea) forțelor concurente.*

Principiul acțiunii și reacțiunii *enunțat ca a treia lege a mecanicii* ***(lex tertia)*** *are formularea:* ***la orice acțiune corespunde o reacțiune egală și de sens opus*** *sau* ***acțiunile reciproce ale două corpuri sunt egale, de aceeași direcție și de sensuri opuse.*** *Facem iarăși precizarea că în toate enunțurile noțiunea de corp trebuie înțeleasă ca noțiunea de punct material.*

Principiul transmisibilității *este principiul care de fapt definește corpul nedeformabil și are enunțul:* ***starea unui corp rigid (nedeformabil) nu se modifică dacă o forță acționând într-un punct al lui este înlocuită cu o altă forță având aceeași mărime, aceeași direcție și sens dar cu punctul de aplicație într-un alt punct de pe suportul forței*** *(fig. 1.). Cele două forțe se spune că au același efect asupra corpului și că sunt* ***echivalente.***

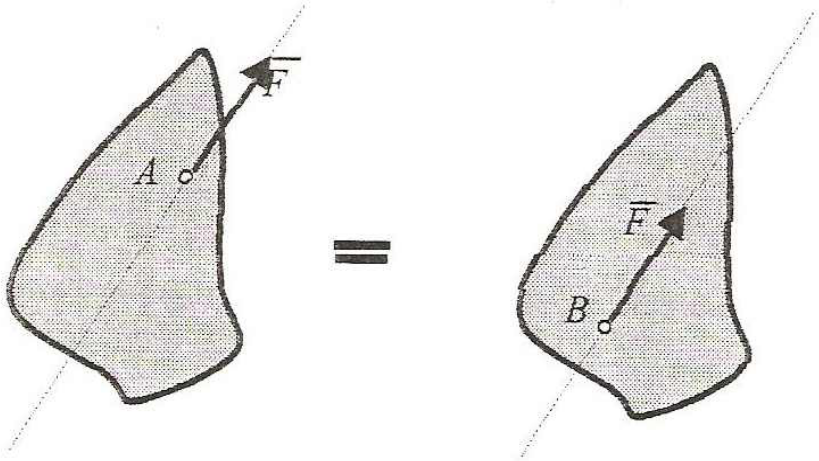


Fig.1.

1.4.Modele teoretice şi schematizări.

Prin model sau schematizare se va înţelege o reprezentare a corpului sau fenomenului real cu un anumit grad de aproximare. Însă aproximarea trebuie să fie efectuată astfel încât să reflecte cât mai aproape de realitate acel corp sau fenomen.

Pentru simplificarea studiului mecanicii teoretice, corpurile materiale se schematizează obţinându-se două modele derivate din modelul general al ***continuului material: solidul rigid şi punctul material.***

Solidul rigid *este , prin definiţie, corpul material nedeformabil. Acest corp are proprietatea că distanţa dintre oricare două puncte ale lui nu se modifică indiferent de acţiunile exercitate asupra lui. În consecinţă, în mecanica teoretică atunci când ne referim la corp vom înţelege solid rigid, sau pe scurt* ***rigid.*** *Acest model este acceptat în mecanica teoretică deoarece, în general, deformaţiile corpurilor raportate la deplasările, sau dimensiunile lor sunt mici şi pot fi neglijate fără a fi introduse erori substanţiale în rezolvarea sau în rezultatele problemei studiate.*

În cazul în care corpul are dimensiuni neglijabile în raport cu celelalte elemente ale problemei studiate sau, în problema analizată dimensiunile şi forma corpului nu interesează, modelul utilizat în mecanică este cel de ***punct material.*** *În ultimă instanţă, punctul material este punctul geometric căruia i se atribuie masa corpului corespunzător schematizării.*

Corpurile modelate ca solide rigide pot fi schematizate şi în funcţie de raportul dimensiunilor lor. Vom deosebi următoarele schematizări: ***bare, plăci*** *şi* ***blocuri.***

Barele *sau* ***liniile materiale*** *sunt corpuri la care o dimensiune (lungimea) este mult mai mare decât celelalte două dimensiuni (lăţimea şi grosimea). Aceste corpuri se reduc la o linie care reprezintă locul geometric al centrelor de masă ale secţiunilor transversale.*

Plăcile *sau* ***suprafeţele materiale*** *sunt corpurile la care două dimensiuni sunt mult mai mari decât cea de-a treia (grosimea). Corpurile în acest caz se reduc la o suprafaţă reprezentând suprafaţa mediană a plăcii.*

Blocurile *sau* ***volumele materiale*** *sunt corpurile la care cele trei dimensiuni sunt comparabile.*

În sfârşit , o ultimă clasificare a corpurilor poate fi

făcută şi după modul de distribuţie a masei în interiorul corpului. În funcţie de acest criteriu avem: ***corpuri omogene*** *pentru care distribuţia masei este uniformă în întregul volum al corpului şi* ***corpuri neomogene*** *la care distribuţia masei este neuniformă.*

STATICA

Capitolul 2. Sisteme de forțe.

2.1.Generalități.

În acest capitol se vor studia sistemele de forțe și modul de transformare al acestora în alte sisteme mai simple. Vom începe cu sistemele de forțe concurente, și pe parcurs vom trece la alte sisteme, cum sunt cele coplanare, paralele și la sistemele de forțe oarecare. De asemenea vom studia în primul rând sistemele în spațiul cu trei dimensiuni, apoi vom particulariza relațiile obținute corespunzător spațiului cu două dimensiuni (problema plană).

Vom face câteva precizări. Astfel dacă două sisteme de forțe au același efect asupra corpului pe care acționează vom spune că sistemele sunt ***echivalente.*** *Și reciproca este adevărată, adică două sisteme de forțe echivalente produc același efect asupra aceluiași corp. În general vom căuta să determinăm* ***cel mai simplu sistem echivalent*** *unui sistem de forțe dat.*

2.2.Forța.

Forța se definește ca fiind acțiunea unui corp asupra altui corp și este o mărime vectorială caracterizată, în general de ***mărime, direcție, sens*** *și* ***punct de aplicație.*** *Fiind vorba de o mărime vectorială, forța poate fi reprezentată grafic, ca în figura 2, punând în evidență aceste patru caracteristici.*

Mărimea forței este definită, folosind unitățile de măsură ale forței, printr-un scalar. Mărimea este reprezentată folosind o anumită scară (corespondența dintre unitățile de măsură ale forței și unitățile de

lungime) prin lungimea unui segment.

Direcția forței se definește cu ajutorul **dreptei suport**, *care este dreapta pe care acționează forța. Direcția dreptei suport raportată, prin intermediul unui unghi, la direcția unei drepte (sau axe) de direcție cunoscută este dată de unghiul (α) format de cele două drepte.*

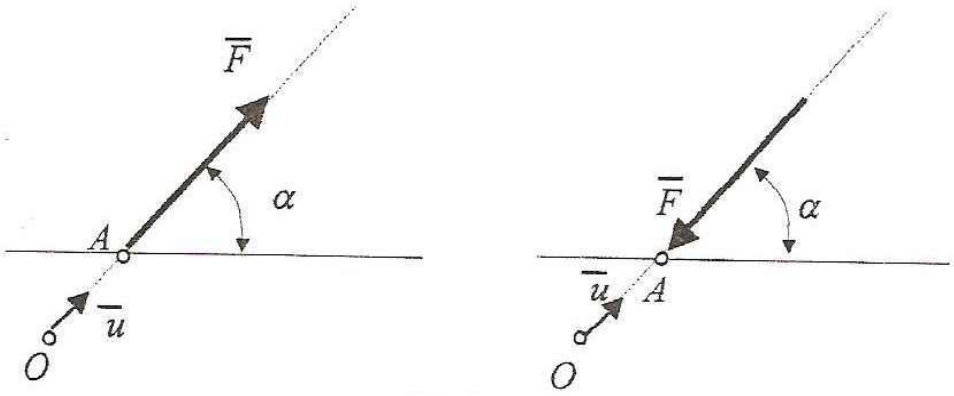


Fig.2.

Sensul forței se reprezintă prin săgeata care este reprezentată într-una din cele două extremități ale forței. Punctul de aplicație este în general indicat printr-o literă și poate să fie situat fie în capătul opus săgeții, fie chiar în același capăt.

Așa cum se cunoaște, o dreaptă devine axă dacă pe acea dreaptă se alege un punct ca origine a axei (punctul O în figura 2.) și un sens pozitiv. Direcția și sensul pozitiv al axei se pot pune în evidență cu ajutorul unui vector unitate numit **versor** *(u în figura 2). Cu ajutorul acestui versor forța se poate exprima astfel:*

$$\overline{F} = \pm F\,\overline{u}$$

expresie în care se pun în evidență trei din cele patru caracteristici ale forței: mărimea notată cu F, direcția cu ajutorul versorului u, iar sensul prin intermediul semnului care dacă este (+) arată că forța și versorul au același sens, iar dacă este (-) sunt de sensuri opuse.

Poate fi remarcat ușor faptul că această relație nu conține nici o referire la punctul de aplicație al forței și nici la poziția dreptei suport în raport cu un reper oarecare. Înseamnă că poziția forței în spațiu va trebui exprimată folosind o altă noțiune, despre care însă vom vorbi într-o secțiune viitoare.

2.3.Proiecția forței pe o axă. Componenta forței pe direcția unei axe.

Să considerăm o forță oarecare, reprezentată în figura 3. între punctele A și B și o axă oarecare (Δ) definită prin intermediul versorului $\overline{u}_\Delta$. Vom considera prin cele două puncte A și B două plane (P_1) și (P_2) paralele și perpendiculare pe axa (Δ). Aceste două plane vor fi intersectate de axa (Δ) în punctele A_1 și B_1.

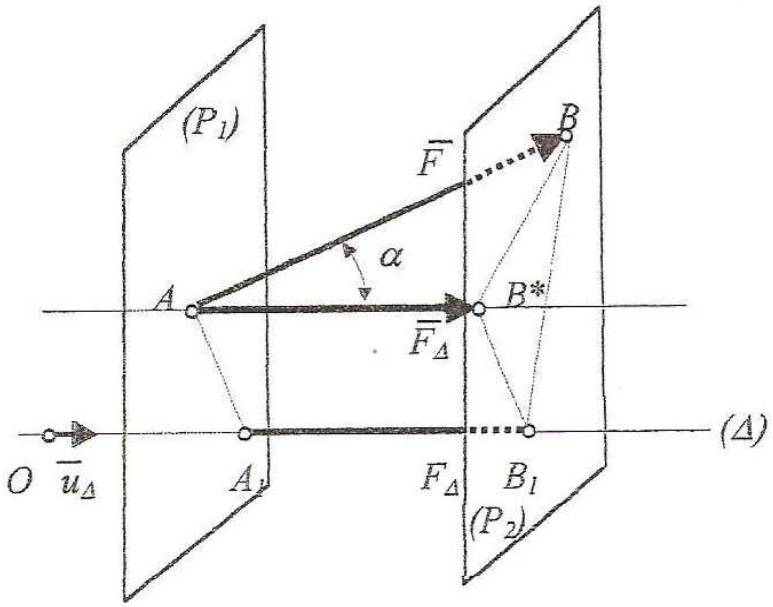


Fig.3.

Segmentul A_1B_1 măsurat la scara forțelor poartă numele de ***proiecția forței*** *F pe axa (Δ) și se notează:*

$$A_1B_1 = pr_\Delta F = F_\Delta$$

Și așa cum poate fi remarcat ușor este o mărime scalară.

Dacă prin punctul A se duce o dreaptă paralelă cu axa (Δ), atunci aceasta intersectează planul (P_2) în punctul B și avem evident:*

$$A_1B_1 = AB^*$$

Acest segment este însă catetă în triunghiul dreptunghic ABB şi poate fi calculat rezultând expresia proiecţiei unei forţe pe direcţia unei axe date:*

$$F_{\Delta} = F \cdot \cos\alpha$$

Observăm că această proiecţie poate fi exprimată şi ca un produs scalar:

$$F_{\Delta} = \overline{F} \cdot \overline{u}_{\Delta}$$

Dacă în extremitatea B aşezăm o săgeată, atunci AB* devine un vector care la scara forţelor are chiar mărimea proiecţiei forţei pe direcţia axei (Δ). Acest vector se numeşte* ***componenta forţei*** $\overline{F}$ *pe direcţia axei (Δ) şi poate fi exprimată:*

$$\overline{F}_{\Delta} = F_{\Delta} \cdot \overline{u}_{\Delta}$$

Putem să facem observaţia că: proiecţia forţei pe o axă este o mărime scalară şi poate fi obţinută pe axă sau pe orice paralelă la axa respectivă, pe când componenta forţei pe direcţia axei este un vector care are mărimea egală cu proiecţia forţei pe axă şi punctul de aplicaţie comun cu forţa a cărei componentă este.

2.4. Compunerea a două forţe concurente.

În general când avem de-a face cu un sistem de forţe, problema principală care se pune este de a transforma sistemul într-unul mai simplu. Acest lucru se poate obţine dacă vom putea înlocui sistemul de forţe cu altul mai simplu dar care să prezinte acelaşi efect asupra corpurilor pe care acţionează. Vom porni de la cel mai simplu sistem de forţe, cel format din două forţe concurente.

Presupunem două forţe $\overline{P}$ *şi* $\overline{Q}$ *având acelaşi punct de aplicaţie. În baza principiului 3 (principiul paralelogramului) aceste două forţe pot fi înlocuite cu o singură forţă având acelaşi efect. Această forţă, notată cu* $\overline{R}$*, poartă denumirea de* ***forţă rezultantă****, sau mai pe scurt*

rezultantă.

Din punct de vedere matematic această rezultantă este suma vectorială a celor două forțe și putem scrie:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$$

Mărimea aceste rezultante se obține folosind teorema cosinusului în unul din cele două triunghiuri ce se formează în paralelogramul forțelor:

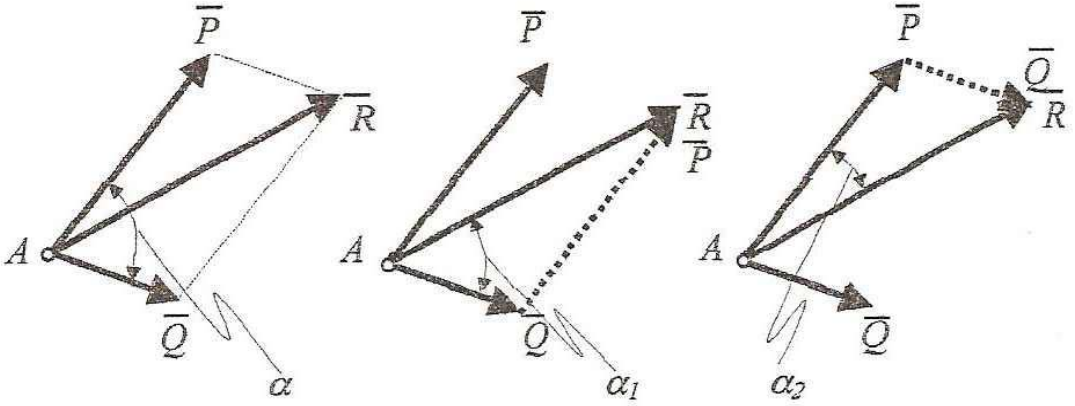


Fig.4.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

Direcția se poate obține determinând unghiul în raport cu una din direcțiile celor două forțe, prin folosirea teoremei sinusului în unul din cele două triunghiuri formate de rezultantă cu cele două forțe:

$$sin\alpha_1 = \frac{P}{R} sin\alpha \; ; \; sin\alpha_2 = \frac{Q}{R} sin\alpha$$

Din regula paralelogramului derivă o altă metodă și anume ***regula triunghiului****. În acest procedeu de obținere a rezultantei celor două forțe, se aduce una din cele două forțe (la alegere) cu punctul de aplicație în vârful celeilalte forțe. Unind punctul de aplicație comun cu vârful celei de a doua forțe se obține rezultanta sistemului de două forțe.*

În cazul particular a două forțe coliniare și de același sens , regula triunghiului arată că rezultante se poate obține prin sumarea

scalară a mărimilor celor două forțe:

$$R = P + Q$$

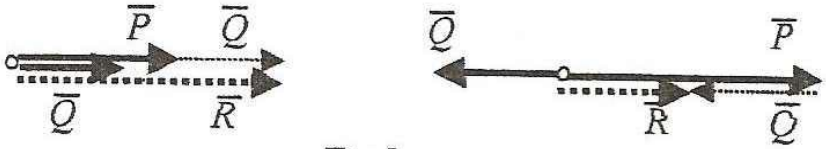


Fig.5.

Dacă forțele sunt coliniare dar cu sensuri opuse, din aceeaşi regulă rezultă că rezultanta poate fi calculată cu relația:

$$R = P - Q$$

2.5. Forța în sistemul cartezian

Vom considera acum o forță având punctul de aplicație în originea unui ***sistem de referință cartezian triortogonal drept.*** *Acest sistem de referință are axele Ox, Oy şi Oz (de aici şi denumirea de sistem cartezian, deoarece Descartes a fost primul care a folosit aceste notații, iar numele lui latinizat era Cartezius) perpendiculare două câte două şi aşezate astfel încât privitorul aflat în primul diedru vede notațiile axelor în ordinea x,y,z în sens trigonometric. Axele mai pot fi definite (ca direcție şi sens pozitiv) şi folosind versorii axelor care sunt i, j, k corespunzător celor trei axe.*

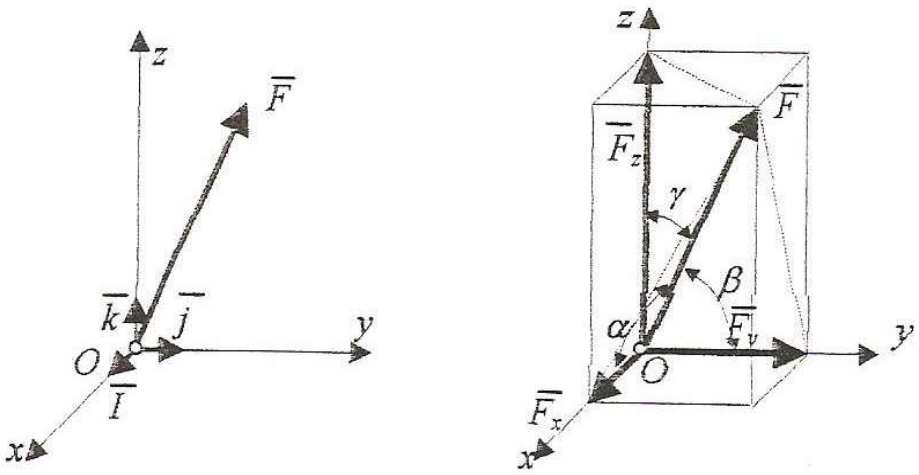


Fig.6.

Pentru exprimarea forței $\overline{F}$ în raport cu sistemul de referință ales vom proceda în modul următor: definim mai întâi proiecția forței pe una din axe, de exemplu axa Ox, prin ducerea a două plane paralele și perpendiculare pe acea axă. Dacă considerăm acum componenta, aceasta se va găsi chiar pe axă și va fi notată cu $\overline{F}_x$. Procedând în același mod cu celelalte două axe se vor obține proiecțiile pe acestea și componentele corespunzătoare. Vor rezulta, notând unghiurile dintre forța $\overline{F}$ și axele sistemului cu α, β și γ:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha\,;\; F_y = F \cdot \cos\beta\,;\; F_z = F \cdot \cos\gamma$$

cele trei proiecții ale forței pe axe și:

$$\overline{F}_x = F_x \cdot \overline{i};\; \overline{F}_y = F_y \cdot \overline{j};\; \overline{F}_z = F_z \cdot \overline{k};$$

cele trei componente ale forței pe direcțiile celor trei axe.

Adunând vectorial cele trei componente (mai întâi două și apoi cu a treia) se obține relația:

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z$$

sau:

$$\overline{F} = F_x \cdot \overline{i} + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k}$$

Dacă se notează, pentru simplificare, cele trei proiecții:

$$F_x = X\,;\; F_y = Y\,;\; F_z = Z$$

și componentele cu:

$$\overline{F}_x = \overline{X} = X \cdot \overline{i}\,;\; \overline{F}_y = \overline{Y} = Y \cdot \overline{j}\,;\; \overline{F}_z = \overline{Z} = Z \cdot \overline{k}$$

atunci vom avea expresia forței în raport cu sistemul de referință cartezian (exprimat în funcție de proiecțiile pe axele sistemului):

$$\overline{F} = X \cdot \overline{i} + Y \cdot \overline{j} + Z \cdot \overline{k}$$

Presupunând că se cunosc proiecţiile forţei pe axele sistemului cartezian, mărime şi direcţia forţei rezultă:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$Cos\alpha = \frac{X}{F};\ cos\beta = \frac{Y}{F};\ cos\gamma = \frac{Z}{F}.$$

2.6.Rezultanta unui sistem de forţe concurente. Teorema proiecţiilor.

Prin ***sistem de forţe concurente*** *se înţelege acel sistem de forţe în care toate forţele au acelaşi punct de aplicaţie. În cazul în care acest tip de sistem acţionează asupra unui corp rigid este suficient ca suporturile forţelor să fie concurente în acelaşi punct. Să presupunem acum un sistem de forţe concurente. Pentru transformarea sistemului în cel mai simplu sistem echivalent (care are acelaşi efect) se poate proceda la utilizarea uneia din cele două reguli folosite în cazul a două forţe (regula paralelogramului şi regula triunghiului). Este mai uşor de folosit şi în acest caz regula triunghiului , astfel se obţine rezultanta primelor două forţe care apoi se însumează cu următoarea forţă şi aşa mai departe. Procedând în acest mod se obţine o nouă regulă:* ***regula conturului poligonal.***

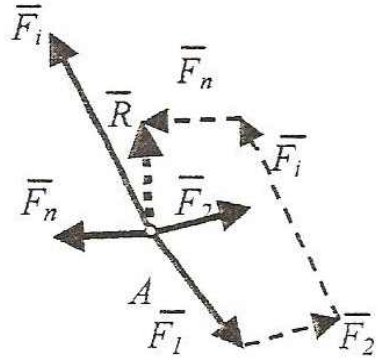


Fig.7.

Această regulă spune că pentru determinarea rezultantei (sumei vectoriale) a unui sistem de forţe concurente este suficient să aşezăm, într-o ordine oarecare, forţele sistemului astfel ca în fiecare punct să se afle vârful forţei precedente şi punctul de aplicaţie al forţei următoare şi apoi să

unim punctul de aplicație comun al forțelor cu vârful ultimei forțe din conturul poligonal astfel obținut. Vectorul rezultant este rezultanta sistemului de forțe concurente:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F_i}$$

Însă această metodă grafică este deosebit de greu de folosit în cazul sistemelor de forțe în spațiu și al sistemelor cu multe forțe. Datorită acestui motiv se caută o metodă analitică de determinare a rezultantei sistemului de forțe concurente. În vederea acestui lucru se enunță ***teorema proiecțiilor****: proiecția pe o axă a rezultantei unui sistem de forțe concurente este egală cu suma tuturor proiecțiilor forțelor din sistem pe aceeași axă. Pentru demonstrarea acestei teoreme este suficient să înmulțim scalar cu versorul unei axe relația precedentă:*

$$\overline{R} \cdot \overline{u_\Delta} = \Sigma \overline{F_i} \cdot \overline{u_\Delta}$$

Cunoscând faptul că produsul scalar dintre o forță și versorul unei axe , prin definiție, este proiecția forței pe acea axă avem evident:

$$R_\Delta = \Sigma F_{i\Delta}$$

care reprezintă chiar teorema enunțată.

În cazul unui sistem de referință cartezian se poate scrie:

$$X = \Sigma X_i \; ; \; Y = \Sigma Y_i \; ; \; Z = \Sigma Z_i \; ;$$

unde am notat cu X, Y și Z proiecțiile rezultantei pe cele trei axe și cu X_i, Y_i și Z_i proiecțiile forțelor pe aceleași axe.

Se obține în final rezultanta , ca vector, în mărime și în direcție:

$$\overline{R} = (\Sigma X_i) \cdot \overline{i} + (\Sigma Y_i) \cdot \overline{j} + (\Sigma Z_i) \cdot \overline{k};$$

$$R = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2} \; ;$$

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma X_i}{R} \; ; \; \cos\beta = \frac{\Sigma Y_i}{R} \; ; \; \cos\gamma = \frac{\Sigma Z_i}{R}$$

1.7.Exemplificări.

Problema 1. *Se dă un sistem de forțe ca în figura 8.a. în care mărimile forțelor sunt $F_1 = 10$ N; $F_2 = 20$ N; $F_3 = 17{,}3$ N. Să se calculeze și reprezinte rezultanta sistemului de forțe. .*

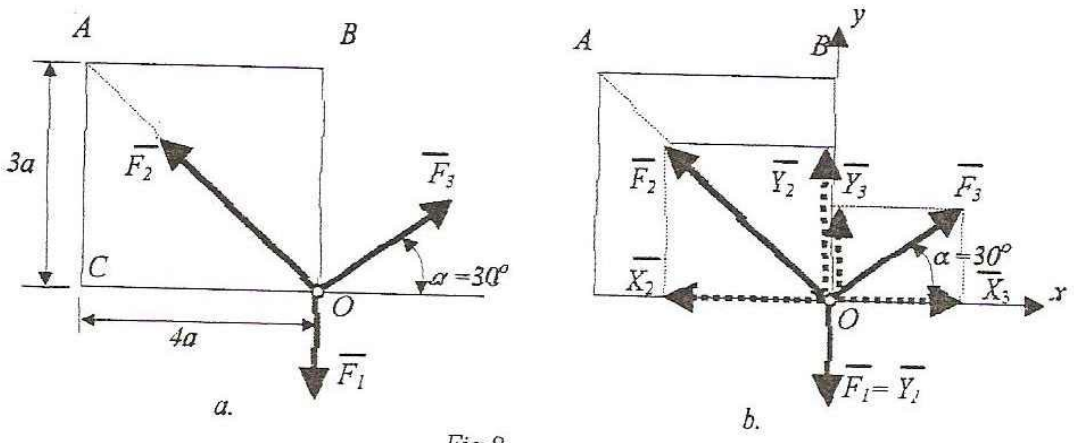


Fig.8.

Rezolvare. Etapa 1. *În primul rând vom observa că sistemul de forțe este în același timp și coplanar, adică forțele sistemului se situează toate în același plan. În consecință vom alege ca sistem de referință un sistem plan Oxy cu originea în punctul de aplicație comun al forțelor.*

Cum poate fi remarcat , există trei tipuri de forțe în plan: $\overline{F_1}$ este o forță pe direcția unei axe de referință (aici pe direcția axei Oy), $\overline{F_2}$ este o forță la care direcția este dată trecând prin două puncte date (aici prin punctele O și A) și $\overline{F_3}$ forță la care direcția este dată prin unghiul format în raport cu o direcție cunoscută (aici cu orizontala, adică cu axa Ox).

Vom alege ca mod de calcul al rezultantei metoda analitică, cea care folosește teorema proiecțiilor. Pentru determinarea proiecțiilor forțelor vom utiliza însă metoda descompunerii forțelor în componente, cunoscând faptul că mărimea componentei este și mărimea proiecției forței, iar semnul proiecției se poate obține comparând sensul componentei cu sensul pozitiv al axei. Dacă componenta are sensul axei pozitive atunci și proiecția va fi pozitivă.

Forța $\overline{F_1}$ fiind pe direcția unei axe nu mai trebuie descompusă, ea fiind în același timp și componenta ei pe acea axă:

$$\overline{F_1} = \overline{Y_1}$$

Pentru forța $\overline{F_2}$ descompunerea duce la obținerea componentelor $\overline{X_2}$ și $\overline{Y_2}$. Mărimile lor se vor obține cunoscând faptul că unghiul format de forță cu axa este același cu cel format de diagonala dreptunghiului care se formează (întotdeauna segmentul OA poate fi considerat ca diagonală a unui dreptunghi). În acest fel cosinusul unghiului director al forței poate fi calculat ca raport de laturi în triunghiul dreptunghic care s-a format. Rezultă mărimile componentelor:

$$X_2 = F_2 \cdot \frac{l_x}{d} = F_2 \cdot \frac{OC}{OA} = 20 \cdot \frac{4a}{5a} = 16N;$$

$$Y_2 = F_2 \cdot \frac{l_y}{d} = F_2 \cdot \frac{OB}{OA} = 20 \cdot \frac{3a}{5a} = 12N.$$

unde l_x, l_y şi d sunt respectiv : mărimile laturilor dreptunghiului pe direcţiile axelor Ox şi Oy şi lungimea diagonalei dreptunghiului.

Forţa F_3 se va descompune de asemenea în două componente având mărimile:

$$X_3 = F_3 \cdot \cos\alpha = 17{,}3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\ N:$$

$$Y_3 = F_3 \cdot \sin\alpha = 17{,}3 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}65\ N.$$

Etapa 2. Calculul rezultantei. *Cunoscând mărimile componentelor (ale proiecţiilor) vom folosi teorema proiecţiilor pentru determinarea proiecţiilor rezultantei celor trei forţe:*

$$X = \Sigma X_i = -X_2 + X_3 = -16 + 15 = -1\ N;$$
$$Y = \Sigma Y_i = -F_1 + Y_2 + Y_3 = -10 + 12 + 8{,}65 = 10{,}65\ N.$$

Rezultanta sistemului va fi forţa:

$$\overline{R} = -\overline{i} + 10{,}65\overline{j}$$

având mărimea:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{1^2 + 10{,}65^2} = 10{,}75\ N;$$

şi direcţia definită de unghiul α_R:

$$tg\alpha_R = \frac{Y}{X} = \frac{10{,}65}{-1} = +10{,}65 \qquad \alpha_R = 96^\circ.$$

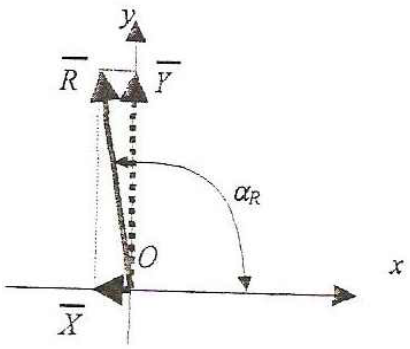


Fig.9.

Problema 2. *Sunt date forţele din figura 10.a reprezentând un sistem de forţe concurente în spaţiu. Cunoscând mărimile forţelor : $F_1 = 5F$, $F_2 = 10F$, $F_3 = 14F$ şi direcţiile lor prin construcţiile geometrice din figură, să se determine şi reprezinte rezultanta sistemului.*

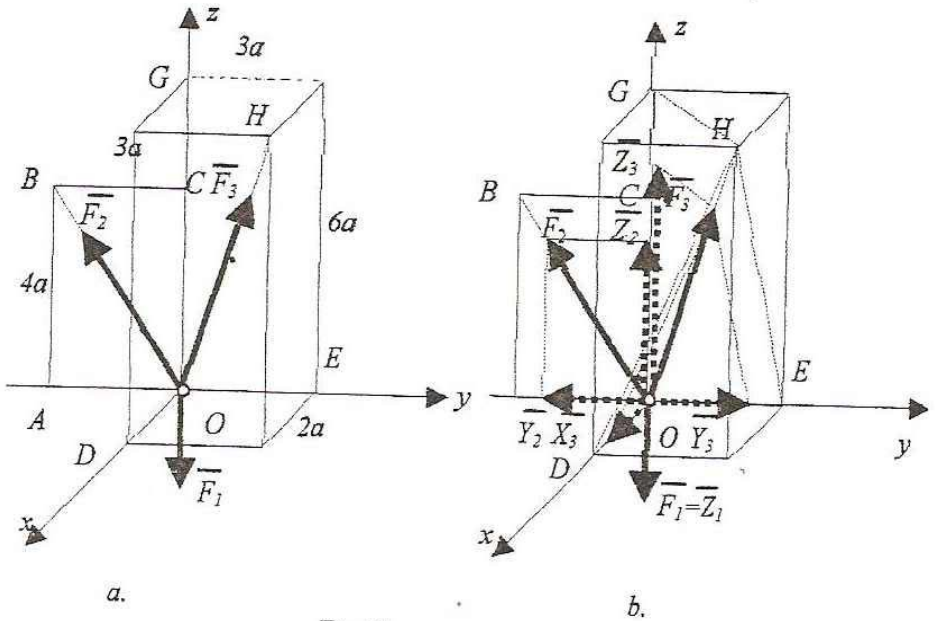


Fig.10.

Etapa 1. Calculul proiecţiilor forţelor. *Se observă că în spaţiu sunt trei tipuri de forţe: forţe coliniare cu una din axele sistemului de referinţă (aici forţa $\overline{F_1}$), forţa situate în planele sistemului de referinţă (aici forţa $\overline{F_2}$) şi forţe oarecare în raport cu axele şi planele sistemului de referinţă (aici forţa $\overline{F_3}$). Pentru forţele din primele două categorii regulile de descompunere şi determinare a proiecţiilor sunt aceleaşi ca şi cele folosite pentru problema plană, adică forţa $\overline{F_1}$ are o singură componentă, chiar forţa însăşi cu mărimea:*

$$F_1 = Z_1 = 5F$$

forţa $\overline{F_2}$ are două componente pe direcţiile axelor planului în care se află, aici planul yOz, descompunerea făcându-se cu regula paralelogramului. Mărimile componentelor vor fi:

$$Y_2 = F_2 \cdot \frac{l_y}{d} = F_2 \cdot \frac{OA}{OB} = 10F \cdot \frac{3a}{5a} = 6F;$$

$$Z_2 = F_2 \cdot \frac{l_z}{d} = F_2 \cdot \frac{OC}{OB} = 10F \cdot \frac{4a}{5a} = 8F;$$

unde l_y , l_z şi $d = \sqrt{l_y^2 + l_z^2}$ sunt laturile corespunzătoare, respectiv diagonala dreptunghiului pe care se află forţa $\overline{F_2}$.

Forța $\overline{F_3}$ va avea trei componente, iar pentru calculul mărimilor acestora putem folosi aceleași reguli ca pentru componentele forței $\overline{F_2}$ cu deosebirea că $d = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + z^2}$ reprezintă lungimea diagonalei paralelipipedului pe diagonala căruia se află forța. Rezultă mărimile componentelor:

$$X_3 = F_3 \cdot \frac{l_x}{d} = F_3 \cdot \frac{OD}{OH} = 14F \cdot \frac{2a}{7a} = 4F;$$
$$Y_3 = F_3 \cdot \frac{l_y}{d} = F_3 \cdot \frac{OE}{OH} = 14F \cdot \frac{3a}{5a} = 6F;$$
$$Z_3 = F_3 \cdot \frac{l_z}{d} = F_3 \cdot \frac{OG}{OH} = 14F \cdot \frac{6a}{7a} = 12F.$$

Etapa 2. Calculul rezultantei sistemului de forțe. *Având mărimile componentelor și sensurile acestora în raport cu axele pozitive putem determina proiecțiile lor pe axele sistemului de referință. Folosind teorema proiecțiilor se obțin proiecțiile rezultantei pe cele trei axe:*

$$X = \Sigma X_i = X_3 = 4F;$$
$$Y = \Sigma Y_i = -Y_2 + Y_3 = -6F + 6F = 0;$$
$$Z = \Sigma Z_i = -Z_1 + Z_2 + Z_3 = -5F + 8F + 12F = 15F.$$

cu care avem expresia rezultantei:

$$\overline{R} = 4F \cdot \overline{i} + 15F \cdot \overline{k}$$

Rezultanta va avea mărimea:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = F\sqrt{4^2 + 15^2} = 15{,}5F$$

iar direcția va fi dată de cosinușii directori:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{4F}{15{,}5F} = 0{,}15 \longrightarrow \alpha = 75^\circ;$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{R} = 0 \longrightarrow \beta = 90^\circ;$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{R} = \frac{15F}{15{,}5F} = 0{,}9 \longrightarrow \gamma = 15^\circ$$

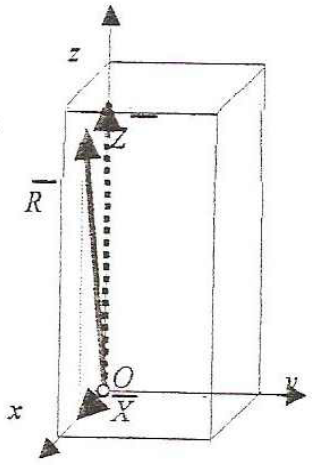


Fig.11.

Problema 3. *Să se calculeze și reprezinte rezultanta sistemului de forțe concurente din figura 12 cunoscând că :* $F_1 = 3F$, $F_2 = 5F$, $F_3 = 5F$, $F_4 = 5\sqrt{2}\,F$.

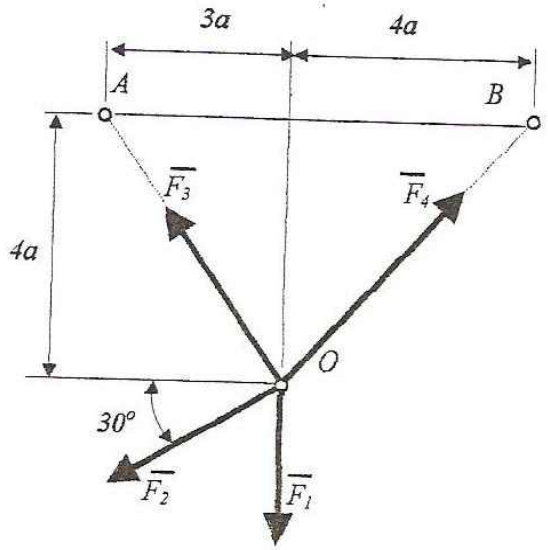


Fig.12.

Problema 4. *Calculați și reprezentați rezultanta sistemului de forțe următor cunoscând mărimile forțelor:* $F_1 = 5F$, $F_2 = 3\sqrt{41}\,F$, $F_3 = 4\sqrt{13}\,F$, $F_4 = 3\sqrt{14}\,F$.

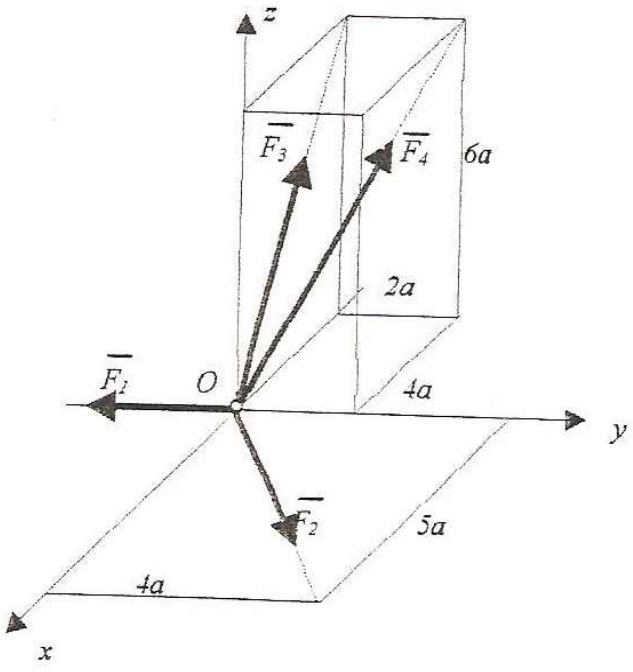


Fig.13.

2.8.Momentul unei forțe în raport cu un punct.

Am văzut în cele prezentate anterior că atunci când o forță acționează asupra unui solid rigid, ea poate fi considerată vector alunecător, adică punctul de aplicație al forței poate fi oricare punct de pe suportul ei, forța păstrându-și efectul asupra corpului. Pe de altă parte expresiile forțelor găsite până în acest moment puneau în evidență numai trei dintre caracteristicile ei și anume: mărimea, direcția și sensul fără a face referire asupra poziției forței în raport cu corpul pe care acționează sau în raport cu sistemul de referință față de care se raportează. În altă ordine de idei dacă considerăm un corp (pentru simplificare un corp plan) cu un punct fixat, este absolut evident că dacă forța acționează în diferite poziții asupra corpului va produce diferite efecte. De exemplu dacă forțe acționează în stânga punctului fix va produce o rotație orară a acestuia (Fig.14.a), dacă se află în dreapta punctului fix va produce o rotație antiorară (Fig.14.b) iar dacă forța are suportul trecând chiar prin punctul fix nu se produce nici o rotație (Fig.14.c) păstrând de fiecare dată mărimea, direcția și sensul forței neschimbate.

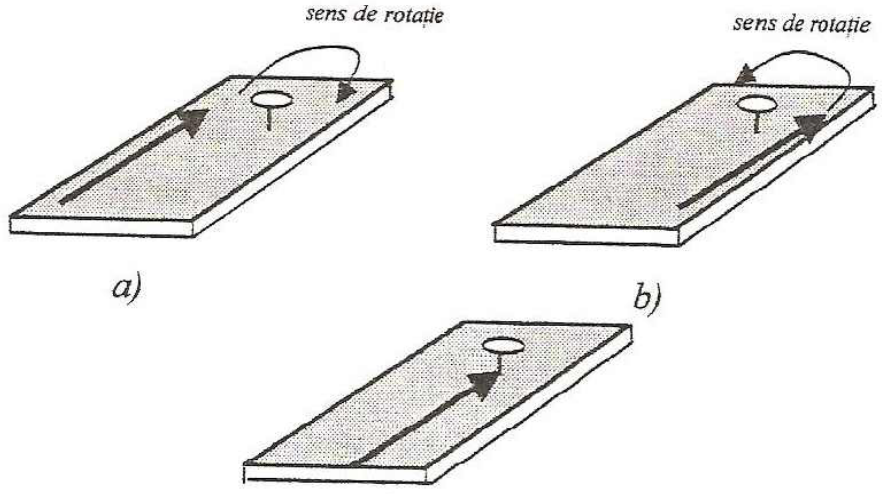


Fig.14.

Acest lucru face ca să fie nevoie să se introducă o nouă noțiune pentru definirea poziției forței față de un anumit reper. Această noțiune este ***momentul forței în raport cu un punct.***

Să presupunem o forță $\overline{F}$ acționând în punctul A și un punct O (Fig.15). Poziția punctului A în raport cu punctul O poate fi definită cu ajutorul unui vector numit ***vector de poziție*** *al punctului A în raport cu punctul O. Vom nota acest vector:*

$$\overline{OA} = \overline{r}$$

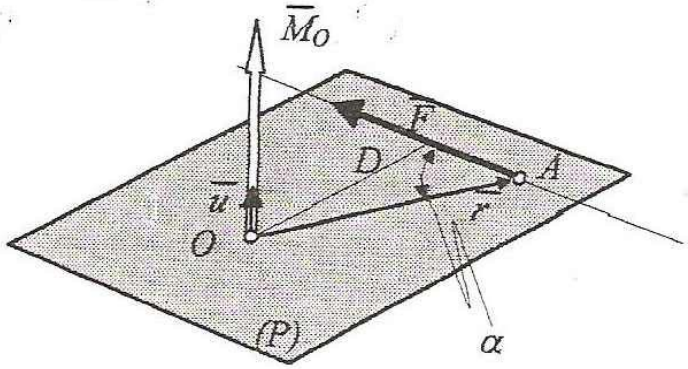


Fig.15.

Prin definiție numim ***moment al forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O*** *mărimea vectorială, notată $\overline{M}_O$ și egală cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\overline{r}$ al punctului de aplicație al forței în raport cu punctul O și forța $\overline{F}$:*

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}$$

În concordanță cu definiția produsului vectorial se obțin următoarele caracteristici ale momentului forței în raport cu un punct. ***Mărimea*** *este:*

$$M_O = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin\alpha = |\overline{F}| \cdot d$$

Unde d este distanța de la punctul O la suportul forței și se ***numește brațul forței.*** ***Direcția*** *este perpendiculară pe planul format de direcția forței și punctul O.* ***Sensul*** *este astfel încât cei trei vectori $\overline{M}_O$, $\overline{r}$ și $\overline{F}$ formează un triedru drept, sau astfel încât coincide cu sensul de înaintare al șurubului drept rotit de forța $\overline{F}$ (regula mâinii drepte).* ***Punctul de aplicație*** *este punctul O.*

În definiție se afirmă că vectorul de poziție este al punctului de aplicație al forței, dar cum forța care acționează asupra unui

corp rigid este un vector alunecător, vom arăta că şi momentul forţei în raport cu un punct este specific forţei considerate vector alunecător. Pentru acest lucru vom considera, pe suportul forţei un alt punct B ca punct de aplicaţie al forţei F. Vom nota vectorul de poziţie al acestui punct cu $\overline{r}_1$, deci momentul forţei în raport cu punctul O va fi:

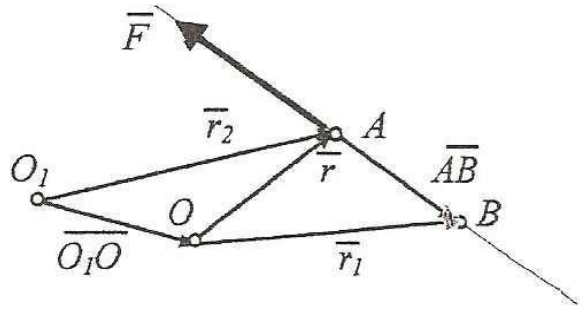


Fig.16.

$$\overline{M}_O' = \overline{r}_1 \times \overline{F}$$

unde vectorul de poziţie $\overline{r}_1$ se poate exprima ca sumă vectorială a vectorilor de poziţie $\overline{r}$ şi $\overline{AB}$:

$$\overline{r}_1 = \overline{r} + \overline{AB}$$

Înlocuind în expresia anterioară şi cunoscând faptul că produsul vectorial este distributiv în raport cu suma vectorială şi de asemenea că produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul avem:

$$\overline{M}_O' = (\overline{r} + \overline{AB}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_O$$

adică obţinem acelaşi moment indiferent de punctul de aplicaţie ales pe suportul forţei.

Însă dacă schimbăm punctul faţă de care se calculează momentul, atunci şi momentul se modifică. De exemplu dacă vom calcula momentul în raport cu punctul O_1 avem:

$$\overline{M}_{O1} = \overline{r}_2 \times \overline{F}$$

Exprimând vectorul de poziţie $\overline{r}_2$ funcţie de cel în raport cu punctul O se poate scrie:

$$\overline{r_2} = \overline{r} + \overline{O_1O}$$

relație care se înlocuiește în definiția momentului și se obține:

$$\overline{M}_{O1} = (\overline{r} + \overline{O_1O}) \times \overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{O_1O} \times \overline{F} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{F}$$

adică dacă schimbăm punctul față de care se calculează momentul se schimbă și momentul. Relația exprimă modul de variație al momentului la schimbarea punctului de calcul.

2.9.Momentul forței în raport cu originea sistemului de referință cartezian.

Să presupunem că forța $\overline{F}$ este exprimată în raport cu sistemul de referință cartezian iar punctul O este originea acestui sistem. Avem evident:

$$\overline{F} = X.\overline{i} + Y.\overline{j} + Z.\overline{k}$$
$$\overline{r} = x.i + y.j + z.k$$

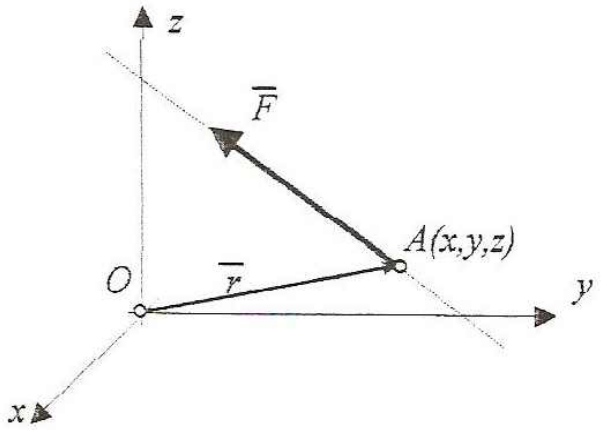


Fig.17.

unde x, y și z sunt coordonatele punctului A de pe suportul forței, iar vectorul de poziție al punctului A în raport cu originea sistemului de referință are proiecțiile pe axe tocmai aceste coordonate.

Cunoscând faptul că produsele vectoriale ale versorilor

axelor sunt:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0 ; \bar{j} \times \bar{j} = 0 ; \bar{k} \times \bar{k} = 0 ; \bar{i} \times \bar{j} = -(\bar{j} \times \bar{i}) = \bar{k};$$
$$\bar{j} \times \bar{k} = -(\bar{k} \times \bar{j}) = \bar{i}; \bar{k} \times \bar{i} = -(\bar{i} \times \bar{k}) = \bar{j};$$

şi efectuând produsul vectorial din definiţia momentului se observă că momentul unei forţe în raport cu originea sistemului de referinţă poate fi exprimat cu ajutorul determinantului;

$$\bar{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}$$

unde M_x , M_y şi M_z sunt proiecţiile pe cele trei axe ale momentului forţei în raport cu originea sistemului de referinţă.

Mai facem precizarea că prin ***moment rezultant*** *într-un punct se înţelege suma momentelor forţelor unui sistem în raport cu acel punct. Suma momentelor se efectuează la fel ca sumele forţelor, deoarece aceste momente formează un sistem concurent de momente, toate momentele având acelaşi punct de aplicaţie: punctul în raport cu care se calculează momentul.*

2.10.Exemplificări.

Problema 5. *Se dă sistemul de forţe din figura 18. şi se cere să se calculeze momentul rezultant al sistemului în raport cu punctul O (originea sistemului de referinţă), cunoscând că mărimile forţelor sunt: $F_1 = 2F$, $F_2 = 4F$, $F_3 = F$ şi $F_4 = 3F$.*

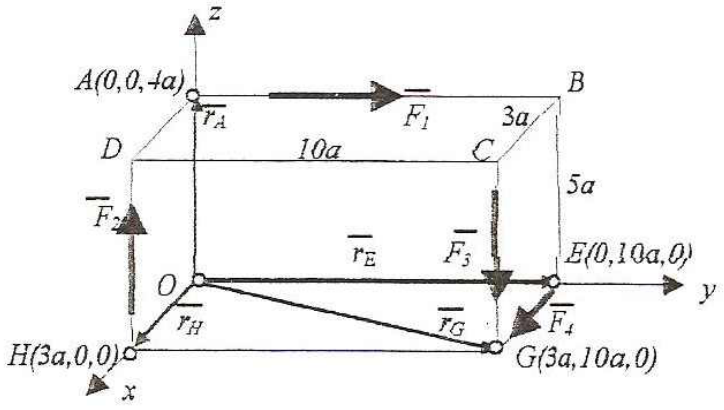


Fig.18.

Rezolvare. *Având de calcul momentul rezultant avem evident:*

$$\overline{M_O} = \Sigma \overline{M_{Oi}}$$

Pentru calculul momentului vom utiliza scrierea sub forma unui determinant. Dar pentru aceasta vom alege punctele de aplicație ale forțelor care vor fi puncte arbitrare de pe suporturile lor. Sigur, în calculul efectiv, aceste puncte se vor alege astfel încât să avem cele mai mari simplificări în calcul. Acest lucru rezultă dacă unele coordonate ale acestor puncte vor fi nule. Astfel pentru forța $\overline{F_1}$ vom alege punctul A(0,0,4a), pentru forța $\overline{F_2}$ punctul H(3a,0,0), pentru forța $\overline{F_3}$ vom alege punctul G(3a,10a,0) iar pentru forța $\overline{F_4}$ punctul E(0,10a,0). Cu aceste puncte vom obține momentul rezultanta:

$$\overline{M_O} = \overline{r_A} \times \overline{F_1} + \overline{r_H} \times \overline{F_2} + \overline{r_G} \times \overline{F_3} + \overline{r_E} \times \overline{F_4} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 4a \\ 0 & 2F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3a & 10a & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 10a & 0 \\ 3F & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -18Fa \cdot \overline{i} - 9Fa \cdot \overline{j} - 30Fa \cdot \overline{k}$$

Problema 6. *Pentru sistemul de forțe din figura 19 să se calculeze momentul rezultant în raport cu originea sistemului de referință cunoscând că : $F_1 = 5F, F_2 = 3F, F_3 = 6F, F_4 = F, F_5 = 2F$.*

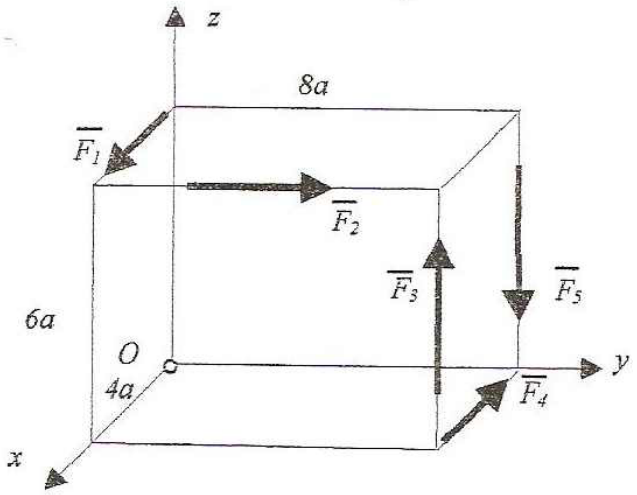


Fig.19.

2.11.Momentul unei forțe în raport cu o axă.

Prin definiție proiecția pe o axă a momentului unei forțe calculate în raport cu un punct de pe acea axă se numește ***momentul forței***

în raport cu acea axă:

$$\overline{M}_{\Delta} = \overline{M}_O \cdot \overline{u}_{\Delta} = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_{\Delta}$$

relație în care am notat cu $\overline{u}_{\Delta}$ versorul axei pe care proiectăm momentul.

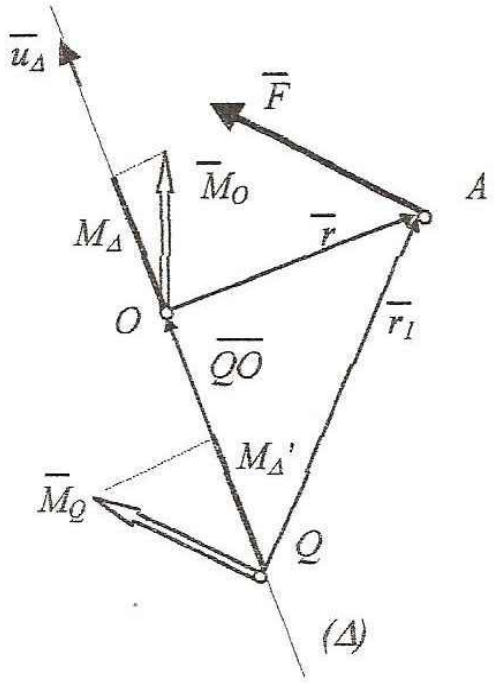


Fig.20.

Pentru a arăta că putem lua orice punct de pe axă şi momentul în raport cu axa nu se modifică vom considera un punct Q, de pe axă, în raport cu care avem conform definiției:

$$M_{\Delta}' = \overline{M}_Q \cdot \overline{u}_{\Delta} = (\overline{r}_1 \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_{\Delta}$$

unde observând că vectorul de poziție poate fi exprimat:

$$\overline{r}_1 = \overline{r} + \overline{QO}$$

Înlocuim în expresia precedentă şi obținem în final:

$$M_{\Delta}' = [(\overline{r} + \overline{QO}) \times \overline{F}] \cdot \overline{u}_{\Delta} = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_{\Delta} + (\overline{QO} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_{\Delta} = M_{\Delta}$$

deoarece al doilea termen este nul, fiind un produs mixt cu doi vectori coliniari. Rezultă că față de orice punct de pa axă am calcula momentul forței se va obține același moment în raport cu axa respectivă.

Vom prezenta în continuare o metodă pentru calculul efectiv al momentului unei forțe în raport cu o axă. Să presupunem aceeași forță și aceeași axă dar vom considera și un plan (P) perpendicular pe axă și care trece prin punctul de aplicație a forței (punctul A). Acest plan intersectează axa în punctul O. Este evident, în baza celor arătate anterior că punctul O poate fi oricare punct de pe axă. Vom mai descompune forța $\overline{F}$ în două componente: una paralelă cu axa (notată $\overline{F}_\Delta$) și a doua conținută în planul (P) și notată $\overline{F}_P$. Putem scrie:

$$\overline{F} = \overline{F}_\Delta + \overline{F}_P$$

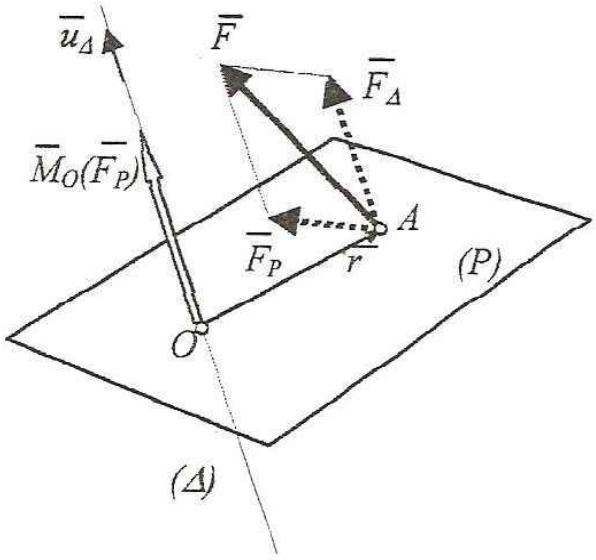


Fig.21.

Acum folosind relația de definiție a momentului forței $\overline{F}$ în raport cu axa (Δ) dar în care înlocuim această ultimă relație se va obține:

$$M_\Delta = \overline{M}_O \cdot \overline{u}_\Delta = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u}_\Delta = [\overline{r} \times (\overline{F}_\Delta + \overline{F}_P)] \cdot \overline{u}_\Delta =$$
$$= (\overline{r} \times F_\Delta) \cdot \overline{u}_\Delta + (r \times F_P) \cdot u_\Delta = M_O(F_P) \cdot \overline{u}_\Delta =$$
$$= \pm |\overline{M}_O(\overline{F}_P)|$$

Ultimul rezultat arată că momentul unei forțe în raport

cu o axă are mărimea egală cu mărimea momentului componentei forței într-un plan perpendicular pe acea axă calculat în raport cu punctul în care axa intersectează planul. Pentru definirea semnului acestui moment vom folosi aceleaşi reguli ca şi în cazul momentului unei forțe în raport cu un punct dar vom considera sensul de rotire în raport cu axa respectivă. De exemplu folosind regula mâinii drepte se aşează mâna dreaptă cu degetele pe direcția forței şi în sensul de acțiune al forței şi cu palma spre axă, degetul mare al mâinii va arăta sensul momentului. De exemplu în figura 22 momentul forței în raport cu axa dată este negativ deoarece degetul mare arată în sens invers sensului pozitiv al axei.

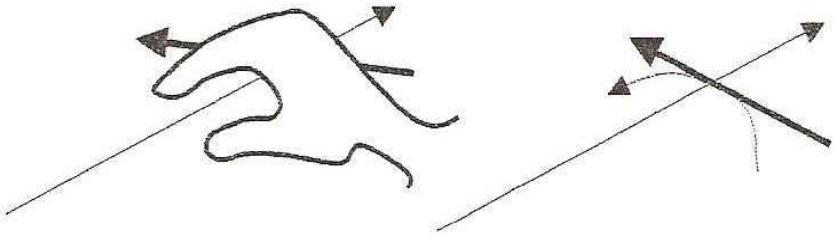


Fig.22.

O altă modalitate de a determina semnul momentului în raport cu o axă este de a defini sensul de rotație produs de forță în jurul axei. Dacă acest sens este trigonometric, privind dinspre axa pozitivă atunci momentul este pozitiv.

Din cele prezentate rezultă de asemenea că o forță care este fie paralelă cu axa fie intersectează axa nu produce moment în raport cu acea axă.

2.12.Exemplificări.

Problema 7. *Pentru sistemul de forțe din figura 23. , care acționează pe muchiile unui paralelipiped de laturi cunoscute, să se calculeze momentul rezultant în raport cu originea sistemului. Se cunosc* $F_1 = 2F$, $F_2 = F$, $F_3 = 3F$, $F_4 = 2F$, $F_5 = 4F$.

Rezolvare. *Sistemul de forțe fiind alcătuit din forțe care au direcțiile paralele cu axele sistemului de referință nu mai trebuie să fie transformat astfel ca forțele să fie descompuse în componente. Pe de altă parte forțele fiind paralele cu axele , ele se află deja în plane perpendiculare pe celelalte axe şi deci avem sistemul de forțe pregătit pentru a calcula momentul rezultant în raport cu originea sistemului de referință determinând direct proiecțiile momentului pe axele sistemului, adică de a calcula momentele în raport cu cele trei axe.*

Momentul în raport cu axa Ox se va calcula eliminând , mai întâi, forțele care nu au moment în raport cu această ax ă, adică forțele care fie intersectează axa fie sunt

Paralele cu axa. Aceste forța sunt: forțele $\overline{F_2}$ și $\overline{F_5}$ intersectează axa , forțele $\overline{F_3}$ și $\overline{F_4}$ sunt paralele cu axa Ox, deci mai rămâne să producă moment în raport cu această axă numai forța F_1. Rezultă:

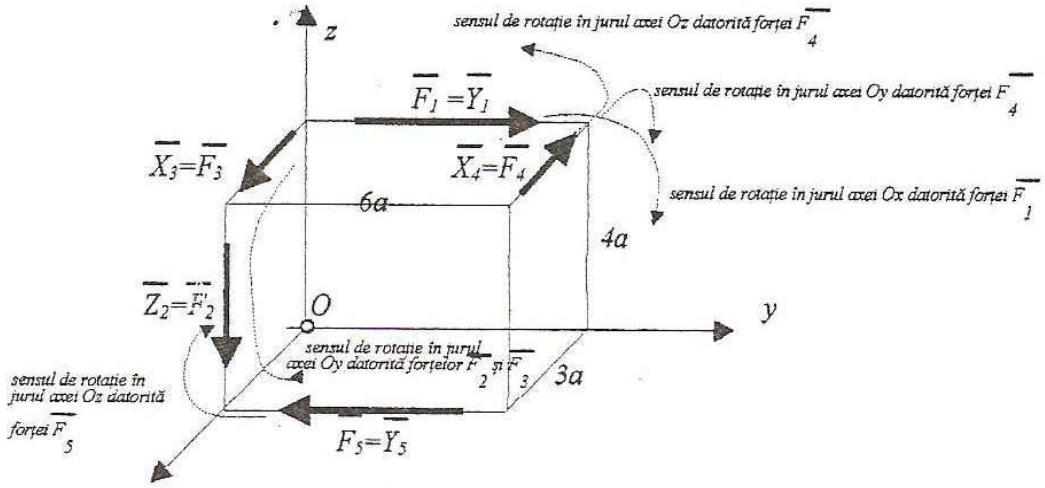


Fig.23.

$$M_x = -Y_1 \cdot l_z = -2F \cdot 4a = -8Fa.$$

Semnul (-) rezultă din regula mâinii drepte sau cu următoarea regulă: se presupune că muchia paralelipipedului de pe axa Ox este fixă, deci paralelipipedul poate să efectueze rotiri în jurul acestei muchii datorită forțelor care acționează. Dacă privim corpul dinspre sensul pozitiv al axei iar corpul se rotește orar datorită forței care acționează atunci momentul este negativ.

Brațul forței este distanța dintre axa Ox și suportul forței deci este perpendiculară atât pe axă cât și pe suportul forței. Dacă corpul este un paralelipiped, ca în aplicația de față, atunci forța acționând de-a lungul unei muchii (aici F_1 este paralelă cu axa Oy) distanța va fi chiar lungimea muchiei perpendiculare atât pe axa Ox cât și pe forța $\overline{F_1} = Y_1$ deci va fi muchia l_z.

Pentru calculul momentului în raport cu axa Oy vom proceda în același mod, adică eliminăm forțele care au moment nul față de această axă (F_1 și F_5 sunt forța paralele cu axa Oy) rămânând doar forțele $\overline{F_2}$, F_3 și $\overline{F_4}$ cu moment față de această axă. Se obține:

$$M_y = Z_2 \cdot l_x + X_3 \cdot l_z - X_4 \cdot l_z = F \cdot 3a + 3F \cdot 4a - 2F \cdot 3a = 9Fa.$$

Forțele $\overline{F_2}$ și $\overline{F_3}$ au momente pozitive deoarece vor produce rotiri trigonometrice ale paralelipipedului în jurul muchiei de pa axa Oy dacă privim figura dinspre axa pozitivă Oy (din dreapta). Pentru determinarea distanțelor cel mai simplu mod este de a nota forțele corespunzător componentelor, astfel perpendiculară pe $\overline{Z_2}$ și pe Oy este muchia l_x , perpendiculară pe X_3 și Oy este muchia l_z și pe X_4 și Oy tot muchia l_z.

Calculul momentului în raport cu axa Oz începe tot cu eliminarea forțelor care nu produc moment în raport cu această axă: F_1 și $\overline{F_3}$ intersectează axa iar F_2 este paralelă cu ea. Astfel numai forțele F_4 și F_5 produc moment în raport cu axa Oz. Vom avea:

$$M_z = +X_4 \cdot l_y - Y_5 \cdot l_x = 2F \cdot 6a - 4F \cdot 3a = 0.$$

Se obține în final momentul:

$$\overline{M_O} = -8Fa\,\overline{i} + 9Fa\,\overline{j}$$

Problema 8. *Fiind dat sistemul de forțe din figura 24. acționând asupra unui paralelipiped să se calculeze momentul rezultant al sistemului în raport cu punctul O. Se cunosc:* $F_1 = 9F$, $F_2 = 5F$, $F_3 = 10\sqrt{2}\,F$.

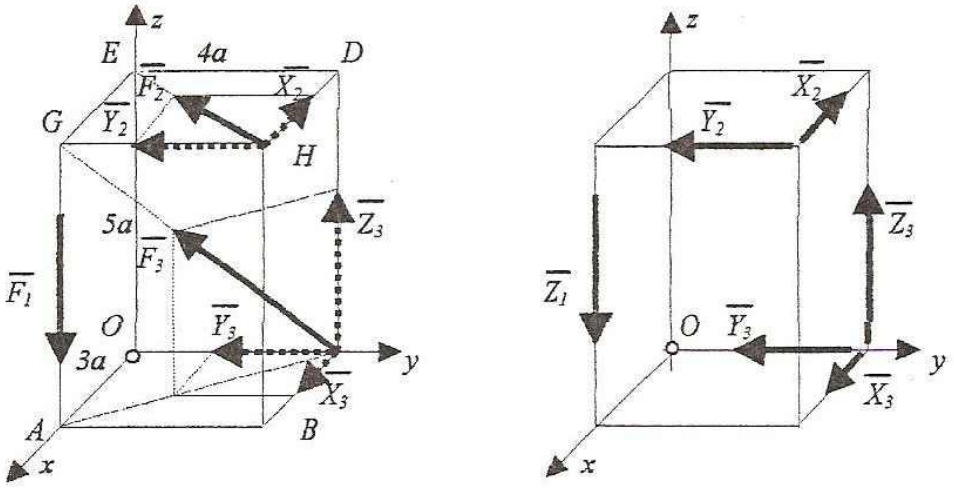


Fig.24.

Rezolvare. *Întrucât forțele sistemului au direcții oarecare vom rezolva problema în două etape: o primă etapă în care descompunem forțele în componente paralele cu axele sistemului de referință și a doua etapă în care vom calcula efectiv momentele în raport cu axele sistemului și cu originea sistemului de referință.*

Etapa 1. *Vom descompune forța* $\overline{F_2}$ *în două componente, iar forța* $\overline{F_3}$ *în trei componente având mărimile:*

$$X_2 = F_2 \cdot \frac{HD}{HE} = 5F \cdot \frac{3a}{5a} = 3F\,;\; Y_2 = F_2 \cdot \frac{HG}{HE} = 5F \cdot \frac{4a}{5a} = 4F\,;$$

$$X_3 = F_3 \cdot \frac{CB}{CG} = 10\sqrt{2}\,F \cdot \frac{3a}{5\sqrt{2}a} = 6F\,;\; Y_3 = F_3 \cdot \frac{CO}{CG} =$$

$$= 10\sqrt{2}\,F \cdot \frac{4a}{5\sqrt{2}a} = 8F\,;\; Z_3 = F_3 \cdot \frac{CD}{CG} = 10\sqrt{2}\,F \cdot \frac{5a}{5\sqrt{2}a} = 10F.$$

Etapa 2. *Urmează calculul momentului rezultant în raport cu cele trei axe, astfel avem:*

$$M_x = Y_2 \cdot l_z + Z_3 \cdot l_y = 4F \cdot 5a + 10F \cdot 4a = 60Fa;$$
$$M_y = Z_1 \cdot l_x - X_2 \cdot l_z = 9F \cdot 3a - 3F \cdot 5a = -12Fa;$$
$$M_z = -X_3 \cdot l_y = -6F \cdot 4a = -24Fa.$$

În cazul momentului în raport cu axa Oz în locul momentelor celor două componente ale forței $\overline{F}_2$ am considerat momentul întregii forțe care intersectând axa în raport cu care calculăm momentul are moment nul. Același lucru poate fi făcut și cu forța $\overline{F}_3$ în raport cu axa Oy dar aici și componentele au moment nul în raport cu această axă.

Problema 9. *Fiind dat sistemul de forțe din figura 25. să se calculeze momentul rezultant în raport cu originea sistemului de referință. Mărimile forțelor sunt date în paranteze în figură.*

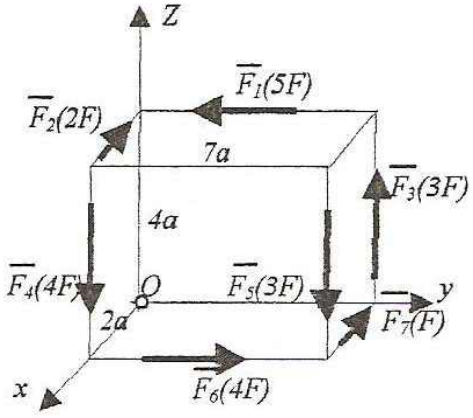


Fig.25.

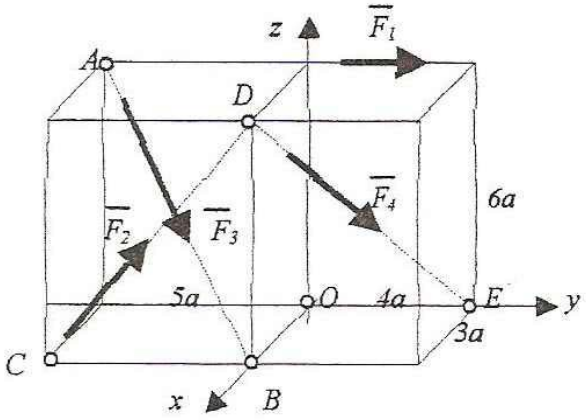


Fig.26.

Problema 10. *Să se calculeze momentul rezultant în raport cu punctul O pentru sistemul de forțe reprezentat în figura 26. Se cunosc:* $F_1 = 4F$, $F_2 = 2\sqrt{61}F$, $F_3 = 3\sqrt{70}F$, $F_4 = 3\sqrt{61}F$.

2.13. Cuplu de forțe.

Vom defini în continuare un sistem particular de forțe. Acest sistem poartă numele de ***cuplu de forțe*** *și prin definiție este sistemul format din două forțe paralele egale ca mărume și de senuri opuse.*

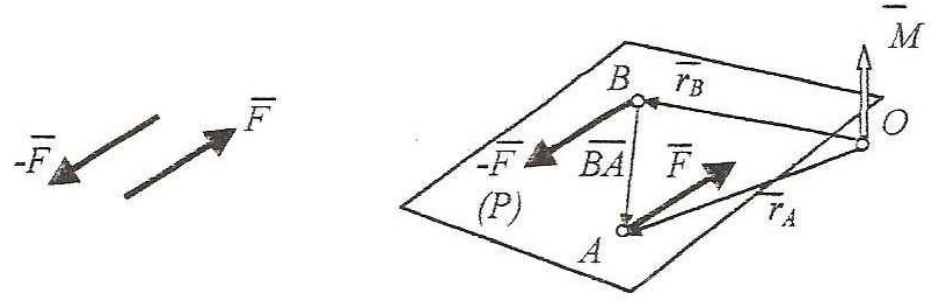


Fig.27.

Acest sistem are o comportare particulară şi anume pe orice direcţie am proiecta am obţine suma proiecţiilor forţelor egală cu zero, adică efectul de forţă al acestui sistem este nul. Putem spune că avem pentru acest sistem:

$$\overline{R} = 0$$

Pe de altă parte dacă calculăm momentul rezultant al sistemului în raport cu un punct oarecare O se va obţine:

$$\overline{M} = \overline{M}_O(\overline{F}) + \overline{M}_O(-\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F} + \overline{r}_B \times (-\overline{F}) =$$
$$= \overline{r}_A \times \overline{F} - \overline{r}_B \times \overline{F} = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \times \overline{F} = \overline{BA} \times \overline{F} = \overline{AB} \times (-\overline{F})$$

Această relaţie duce la următoarele concluzii:

- *Momentul rezultant al cuplului nu depinde de punctul în care se calculează momentul. Acest lucru rezultă din faptul că în rezultatul final nu mai apare referire la punctul O. În consecinţă momentul unui cuplu este un* ***vector liber.***
- *Momentul cuplului se poate calcula ca moment al unei din forţe în raport cu un punct de pe suportul celeilalte forţe.*

Momentul cuplului fiind o mărime vectorială se defineşte prin următoarele caracteristici rezultate din faptul că este de fapt momentul uneia din forţele sistemului în raport cu un punct (de pe suportul celeilalte forţe): ***mărimea*** *este egală cu mărime forţei înmulţită cu distanţa dintre suporturile celor două forţe paralele:*

$$M = F \cdot d$$

unde distanţa d se numeşte ***braţul cuplului;*** ***direcţia*** *momentului cuplului este perpendiculară pe planul ce conţine cele două forţe;* ***sensul*** *se determină cu regula mâinii drepte sau cu regula şurubului drept;* ***punctul de aplicaţie*** *poate fi oricare punct din spaţiu deoarece, aşa cum am arătat este de fapt un vector liber.*

2.14. Teorema lui Varignon.

Vom enunţa în continuare o teoremă pentru sistemele de forţe concurente , iar puţin mai târziu se va reformula această teoremă şi

pentru sisteme de forţe oarecare.

Enunţul teoremei este: pentru un sistem de forţe concurente momentul rezultant al sistemului calculat în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul rezultantei sistemului în raport cu acelaşi punct:

$$\Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O(\overline{R})$$

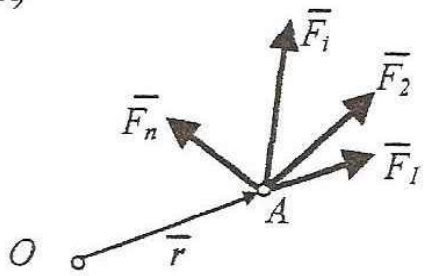


Fig.28.

Demonstraţia teoremei este imediată:

$$\Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \Sigma \overline{r} \times \overline{F}_i = \overline{r} \times \Sigma \overline{F}_i = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{M}_O(\overline{R})$$

2.15.Reducerea unei forţe într-un punct.

Atunci când o forţă acţionează asupra unui corp produce un anumit efect mecanic (de obicei va produce o mişcare care în general poate fi considerată ca o combinaţie dintre o translaţie şi o rotaţie). Sigur că în acest moment al studiului mecanicii nu putem merge până la capăt cu definirea efectului mecanic al forţei dar, folosind noţiunile de forţă şi moment al forţei în raport cu un punct acest efect poate fi cuantificat. Determinarea efectului mecanic al unei forţe într-un punct al corpului pe care acţionează se va numi ***reducerea forţei în acel punct.***

Să presupunem că în punctul A al unui corp rigid acţionează o forţă $\overline{F}$ şi vrem să determinăm efectul mecanic al acestei forţe în punctul O. Pentru acest lucru vom efectua câteva artificii dar fără să modificăm starea mecanică a corpului. Astfel în punctul O vom introduce sistemul de forţe echivalent nul (nu are efect mecanic asupra corpului) format din două forţe egale cu forţa $\overline{F}$ şi de sensuri opuse.

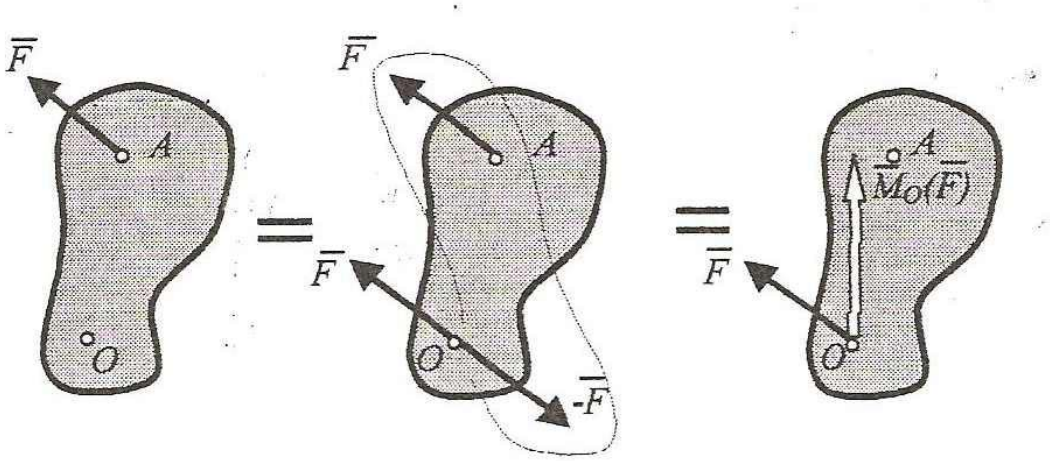


Fig.29.

Acest sistem nu modifică starea mecanică a corpului. Considerând grupate forțele $\overline{F}$ din A şi $-\overline{F}$ din O acestea formează un cuplu care este un vector liber şi poate fi considerat acționând în punctul O. Momentul acestui cuplu este, aşa cum am prezentat mai înainte, egal cu momentul uneia din forțe, aici forța $\overline{F}$ din A, în raport cu un punct de pe suportul celeilalte forțe, aici punctul O. În acest mod ajungem la concluzia că am transformat corpul acționat de forța $\overline{F}$ în A în corpul acționat de o forță $\overline{F}$ în O şi de un moment egal cu momentul forței în raport cu punctul O, fără a modifica starea mecanică a corpului. Ansamblul format de forța $\overline{F}$ în O şi momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O reprezintă efectul mecanic al forței $\overline{F}$ în punctul O. Acest ansamblu poartă numele de **torsorul forței în punctul O**:*

$$\tau_O(\overline{F}) = \begin{cases} \overline{F} \\ \overline{M}_O(\overline{F}) \end{cases}$$

Putem enunța: forța şi torsorul forței într-un punct sunt echivalente (produc acelaşi efect asupra corpului pe care acționează).

2.16. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct.

Să considerăm acum un sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui rigid. Vom determina efectul mecanic al sistemului

în punctul O. Pentru acest lucru se poate înlocui, fără modificarea stării mecanice a corpului, fiecare forță a sistemului cu torsorul corespunzător forței.

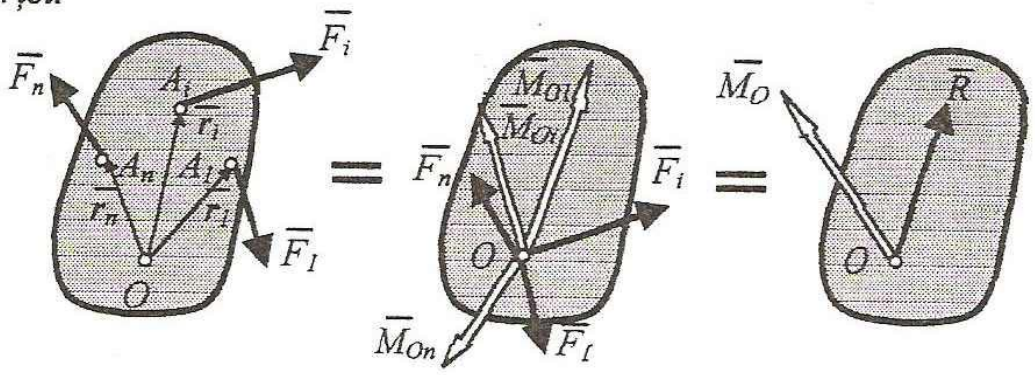


Fig.30.

Se obține în acest fel corpul încărcat în punctul O cu două sisteme concurente: un sistem de forțe concurente având forțele egale cu forțele sistemului inițial, oarecare și un sistem de momente concurente. Echivalentele cele mai simple pentru sistemele concurente sunt vectorii rezultanți (obținuți prin însumarea vectorială) astfel putem înlocui aceste două sisteme concurente cu : rezultanta forțelor calculată ca și când forțele ar fi concurente, acționând în punctul O și momentul rezultant în raport cu punctul O. Ansamblul format de acești doi vectori formează ***torsorul sistemului de forțe în punctul O*** *și are expresia:*

$$\tau_O(\overline{F}_i) = \begin{cases} \overline{R} = \Sigma \overline{F}_i \\ \overline{M}_O = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) \end{cases}$$

Putem enunța: un sistem de forțe este echivalent torsorului său dintr-un punct. Și încă: două sisteme de forțe care au același torsor în același punct sunt echivalente.

Dacă se schimbă punctul de reducere, de exemplu în punctul A, efectuând aceleași operații se obține torsorul în acest punct:

$$\tau_O(\overline{F}_i) = \begin{cases} \overline{R} = \Sigma \overline{F}_i \\ \overline{M}_O = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \Sigma [\overline{M}_O(\overline{F}_i) + \overline{AO} \times \overline{F}_i] = \\ \qquad = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R} \end{cases}$$

2.17.Exemplificări.

Problema 11. *Asupra paralelipipedului din figura 31 acționează un sistem de forțe ca în figură. Cunoscând mărimile forțelor : $F_1 = 3F$, $F_2 = F$, $F_3 = 5F$, $F_4 = 3F$, $F_5 = 4F$, $F_6 = 2F$, să se calculeze și să se reprezinte torsorul sistemului în punctul O și apoi în punctul A.*

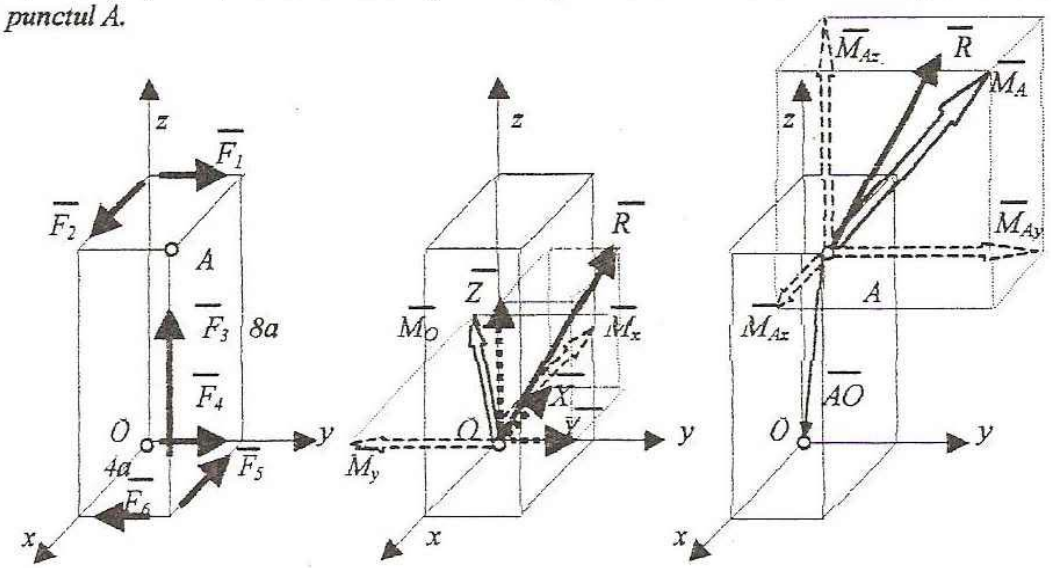


Fig.31.

Rezolvare. *Întrucât forțele sistemului sunt coliniare cu muchiile paralelipipedului etapa descompunerii în componente nu mai este actuală. Altfel o astfel de problemă se va rezolva în două etape: prima în care determinăm componentele forțelor pe direcții paralele cu axele sistemului de referință și a doua cea în care se calculează torsorul cerut. În cazul nostru vom trece direct la calculul torsorului din punctul O adică la calculul rezultantei sistemului ca și când ar fi un sistem concurent de forțe și apoi al momentului rezultant în punctul cerut, aici mai întâi în punctul O.*

Avem proiecțiile rezultantei pe axele sistemului de referință:

$$X = \Sigma X_i = F_2 - F_5 = -3F;$$
$$Y = \Sigma Y_i = F_1 + F_4 - F_6 = 4F;$$
$$Z = \Sigma Z_i = F_3 = 5F;$$

și rezultanta cu mărimea ei:

$$\overline{R} = -3F\,\overline{i} + 4F\,\overline{j} + 5F\,\overline{k};\ R = F\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 7{,}07F.$$

Calculăm acum momentul rezultant în raport cu punctul O prin determinarea momentelor în raport cu cele trei axe ale sistemului de referință:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -F_1 \cdot 8a + F_3 \cdot 2a = -14Fa;$$
$$M_y = \Sigma M_{yi} = F_2 \cdot 8a - F_3 \cdot 4a = -12Fa;$$

$$M_z = \Sigma M_{zi} = F_5 \cdot 2a - F_6 \cdot 4a = 0$$

Adică avem momentul rezultant în punctul O:

$$\overline{M_O} = -14Fa\,\overline{i} - 12Fa\,\overline{j}$$

Reprezentarea acestor doi vectori ($\overline{R}$ şi $\overline{M_O}$) reprezintă torsorul sistemului de forţe în punctul O (Fig.31.b).

Pentru calculul torsorului sistemului de forţe din punctul A se cunoaşte că rezultant nu se modifică iar momentul din acest punct este:

$$\overline{M_A} = \overline{M_O} + \overline{AO} \times \overline{R}$$

unde vectorul de poziţie $\overline{AO}$ este , cu semn schimbat, vectorul de poziţie al punctului A în raport cu punctul O adică are ca proiecţii coordonatele punctului A cu semn schimbat. Calculul produsului vectorial se va efectua cu ajutorul determinantului:

$$\overline{M_A} = -14Fa\,\overline{i} - 12Fa\,\overline{j} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -4a & -2a & -8a \\ -3F & 4F & 5F \end{vmatrix} =$$
$$= 6Fa\,\overline{i} + 32Fa\,\overline{j} + 22Fa\,\overline{k}$$

Reprezentarea acestui torsor este făcută în figura 31.c.

Problema 12. *Pentru sistemul de forţe din figura 32 , acţionând asupra unui paralelipiped , să se calculeze şi reprezinte torsorul sistemului în punctul O şi în punctul A. Se dau : $F_1 = 4F$, $F_2 = 3F$, $F_3 = 5F$, $F_4 = F$.*

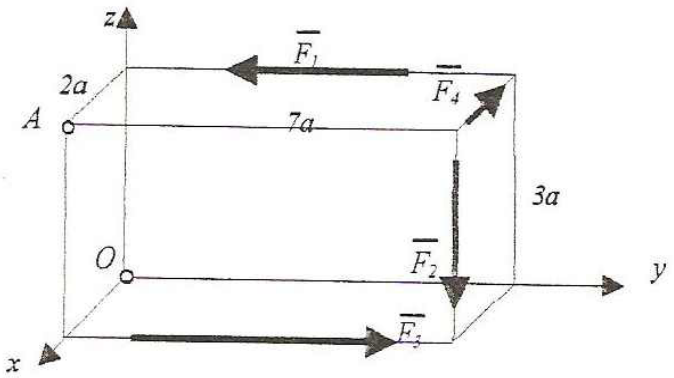


Fig.32.

2.18.Invarianţii sistemelor de forţe. Moment minim, axă centrală.

Am văzut în secţiunea precedentă că dacă schimbăm punctul de reducere rezultanta sistemului de forţe rămâne neschimbată . Se

spune în acest caz că rezultanta este ***primul invariant*** *sau* ***invariantul vectorial*** *al sistemelor de forţe la reducerea lor într-un punct.*

Cel de-al doilea termen al torsorului. adică momentul rezultant, însă se modifică.

Dacă însă relaţia de variaţie a momentului se înmulţeşte scalar cu rezultanta se obţine:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R} \;\Big|\; . \overline{R}$$

sau:

$$\overline{M}_A . \overline{R} = \overline{M}_O . \overline{R} + (\overline{AO} \times \overline{R}) . \overline{R}$$

Dar pentru că ultimul termen este un produs mixt cu doi vectori coliniari acesta va fi egal cu zero şi deci vom găsi:

$$\overline{M}_A . \overline{R} = \overline{M}_O . \overline{R}$$

adică produsul scalar rezultantă moment rezultant într-un punct este invariant la reducerea sistemului de forţe. Acest invariant se numeşte ***al doilea invariant*** *sau* ***invariantul scalar*** *al sistemelor de forţe.*

Să presupunem acum torsorul sistemului de forţe într-un punct oarecare (fig.33.). Pentru că rezultanta este un invariant vom descompune momentul rezultant (care nu este invariant) în două componente: una pe direcţia rezultantei şi a doua pe direcţie normală.

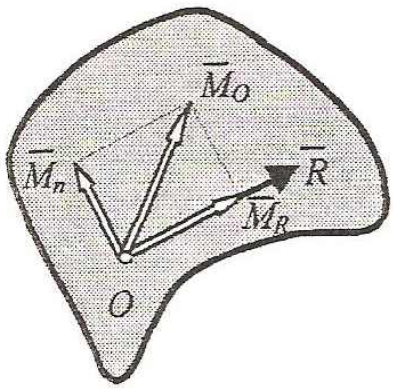


Fig.33.

Vom nota cele două componente : $\overline{M}_R$ *şi* $\overline{M}_n$ *şi avem relaţia:*

$$\overline{M}_O = \overline{M}_R + \overline{M}_n$$

Mărimea componentei pe direcţia rezultantei se determină ca proiecţie a momentului pe acea direcţie:

$$M_R = pr_R \overline{M}_O = \overline{M}_O \cdot \overline{u}_R = \overline{M}_O \cdot \frac{\overline{R}}{R} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{R}$$

adică această componentă are mărimea egală cu raportul celor doi invarianţi, în consecinţă este de asemenea un invariant. Observăm din această constatare că din cele două componente ale momentului rezultant numai componenta normală variază la schimbarea punctului de reducere. Corespunzător valorii minime a acestei componente vom găsi momentul minim, iar acest lucru se obţine când componenta normală este nulă ca valoare. Dar în acest caz momentul rezultant se confundă cu componenta pe direcţia rezultantei deci putem scrie:

$$\overline{M}_{min} = \overline{M}_R$$

Rămâne acum să determinăm punctele din spaţiu în care se obţine acest moment minim. Pentru acest lucru să presupunem că avem calculate elementele torsorului în originea sistemului de referinţă:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$$
$$\overline{M}_O = M_x\overline{i} + M_y\overline{j} + M_z\overline{k}$$

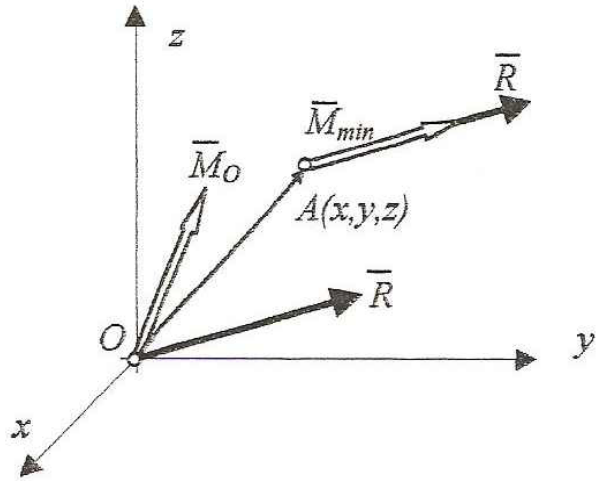


Fig.34.

Să presupunem că în punctul A(x,y,z) momentul este minim, adică coliniar cu rezultanta. În acelaşi timp momentul din acest punct poate fi exprimat în funcţie de elementele torsorului din O:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R}$$

Înlocuind în această relaţie şi ţinând seama de faptul că $\overline{AO}$ *este vectorul de poziţie* $\overline{OA}$ *cu semn schimbat se obţine:*

$$\overline{M}_A = M_x \overline{i} + M_y \overline{j} + M_z \overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -x & -y & -z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$
$$= (M_x - yZ + zY)\,\overline{i} + (M_y - zX + xZ)\,\overline{j} + (M_z - xY + yX)\,\overline{k}$$

Condiţia de coliniaritate dintre rezultantă şi moment rezultant poate fi scrisă:

$$\overline{M}_A = \lambda \overline{R}$$

sau scalar:

$$\frac{M_{Ax}}{X} = \frac{M_{Ay}}{Y} = \frac{M_{Az}}{Z}$$

Înlocuind se obţine în final:

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

care reprezintă ecuaţia unei drepte. Această dreaptă se numeşte ***axă centrală*** *şi se defineşte ca* ***locul geometric al punctelor în care momentul rezultant este coliniar cu rezultanta*** *sau* ***locul geometric al punctelor în care momentul este minim.***

2.19. Cazuri de reducere.

În funcţie de valorile particulare ale celor două componente ale torsorului unui sistem de forţe într-un punct, sistemele de forţe pot fi clasificate în mai multe categorii. Acestea se numesc ***cazuri de***

reducere. *Deosebim următoarele cazuri de reducere:*

- *1)* $\overline{R} = 0$; $\overline{M}_O = 0$. *În acest caz sistemul este echivalent nul şi în consecinţă nu are nici un efect asupra corpului pe care acţionează. Se spune că sistemul de forţe este în* ***echilibru.*** *Cele două relaţii exprimate pentru forţele care formează sistemul pot fi considerate* ***condiţii de echilibru.*** *Vectorial aceste condiţii sunt:*

$$\Sigma \overline{F}_i = 0 \; ; \; \Sigma \overline{M}_{Oi} = 0$$

iar scalar condiţiile de echilibru sunt:

$$\Sigma X_i = 0; \; \Sigma Y_i = 0; \; \Sigma Z_i = 0; \; \Sigma M_{xi} = 0; \; \Sigma M_{yi} = 0; \; \Sigma M_{zi} = 0$$

- *2)* $\overline{R} = 0$; $\overline{M}_O \neq 0$. *Dacă se calculează momentul într-un alt punct (de exemplu în punctul A) rezultă:*

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O$$

adică oriunde am face reducerea am obţine acelaşi torsor. Această comportare corespunde unui cuplu. Se spune că sistemul de forţe se reduce la un ***cuplu.***

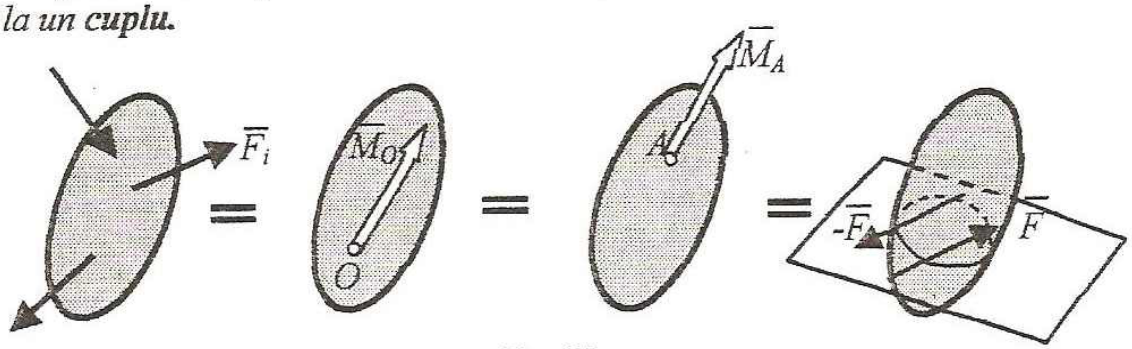


Fig.35.

- *3)* $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M}_O = 0$. *Torsorul de reducere în punctul O are un singur termen şi anume rezultanta. În acelaşi timp torsorul este sistem echivalent sistemului de forţe, deci această rezultantă este cel mai simplu sistem echivalent. Vom spune că sistemul se reduce la o* ***rezultantă unică ce trece prin punctul O.***

În cazul în care se ajunge la acest rezultat (acest caz de reducere) s-a obţinut cel mai simplu sistem echivalent şi rezolvarea problemei se opreşte cu reprezentarea acestei rezultante.

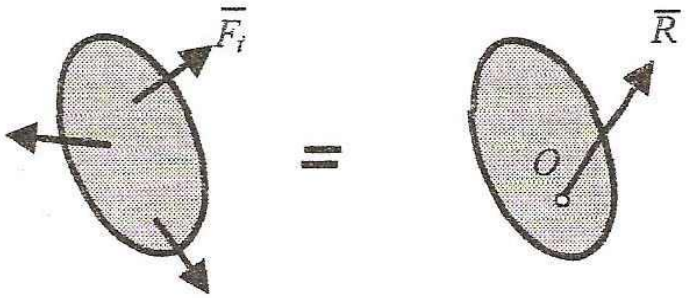


Fig.36.

- *4)* $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$. *În acest caz vom calcula și invariantul scalar al sistemului (în celelalte trei cazuri nu se punea problema acestui calcul întrucât acest invariant rezulta automat egal cu zero) și se obțin următoarele două situații:*

- *a)* $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$, *adică cei doi vectori ai torsorului sunt perpendiculari.*

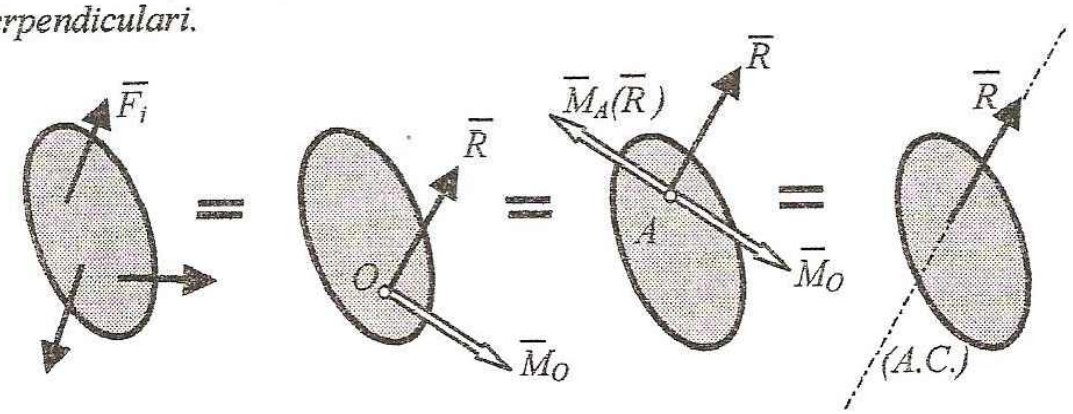


Fig.37.

Sigur că am putea efectua o reducere într-un alt punct, de exemplu în punctul A. Dacă reducerea începe de la torsorul din punctul O deoarece acest sistem este echivalent sistemului de forțe inițial, această reducere se efectuează în felul următor: momentul $\overline{M}_O$ *fiind momentul unui cuplu se poate așeza fără modificare în punctul A, iar forța* $\overline{R}$ *se reduce în A printr-un torsor care este format din forța* $\overline{R}$ *, adică rezultanta sistemului și momentul rezultantei în raport cu punctul A, moment care este de asemenea perpendicular pe rezultantă. Dar punctul A poate fi ales astfel încât momentul rezultantei (din O) în raport cu punctul A să fie de aceeași mărime cu* $\overline{M}_O$ *dar de sens opus. În acest caz cele două momente s-ar anula*

reciproc şi în punctul A am obţine rezultanta $\overline{R}$ a sistemului. Se spune în acest caz că sistemul de forţe se reduce la o ***rezultantă unică ce nu trece prin punctul O.*** *Este însă evident faptul că va trebui să determinăm poziţia acestei rezultante unice. Întrucât momentul rezultant în punctul A este nul această valoare reprezintă momentul minim, deci folosind a doua definiţie a axei centrale, ecuaţia ei, avem poziţia suportului acestei rezultante unice.*

b)$R \cdot \overline{M}_O = 0$ adică cei doi vectori nu sunt perpendiculari. În consecinţă momentul rezultant are componentă nenulă pe direcţia rezultantei, componentă care este chiar momentul minim şi care împreună cu rezultanta formează torsorul minim. Acest torsor minim se găseşte pe axa centrală şi se numeşte ***dinamă.***

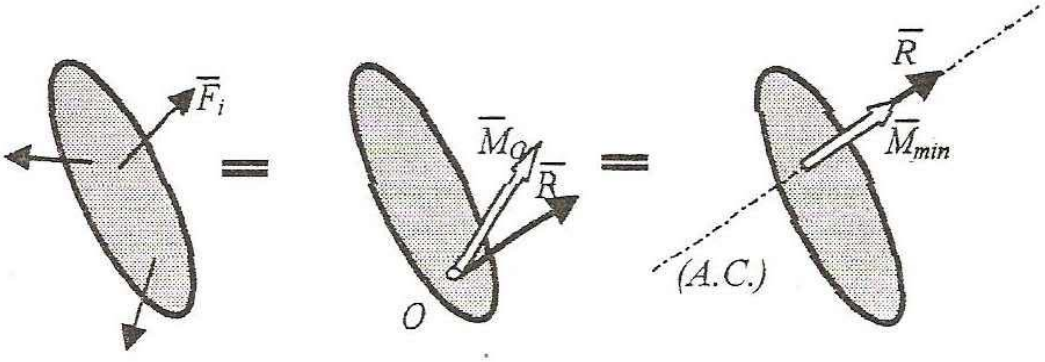


Fig.38.

2.20. Exemplificări.

Problema 13. *Sistemul de forţe din figura 39. acţionează asupra corpului de forma unui cub de latură l. Cunoscând mărimile acestor forţe: $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = F_4 = F\sqrt{2}$ să se calculeze torsorul minim al sistemului (cel mai simplu sistem echivalent sistemului de forţe dat).*

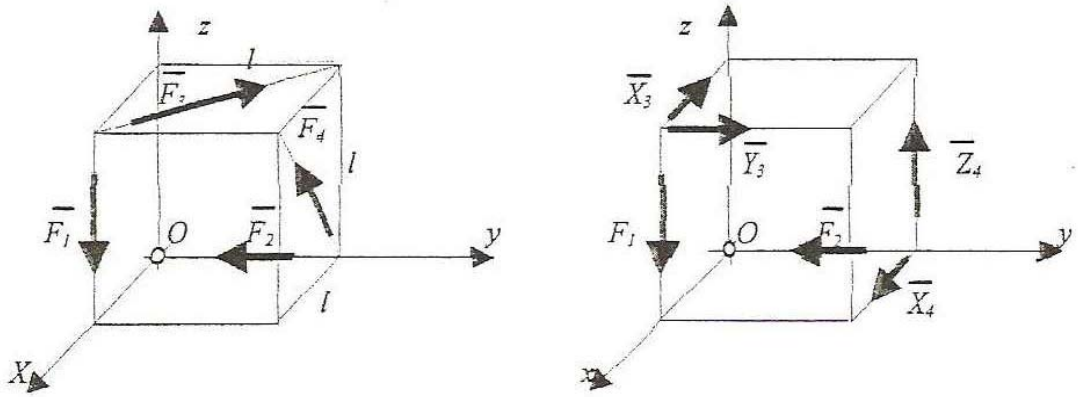


Fig.39.

Rezolvare. *Într-o primă etapă vom descompune forțele sistemului în componente paralele cu axele sistemului de referință. Astfel forțele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ sunt propriile lor componente, forța $\overline{F_3}$ se va descompune în două componente : X_3 și Y_3 iar forța $\overline{F_4}$ în două componente X_4 și Z_4. Aceste componente vor avea mărimile:*

$$X_3 = F_3 \cdot \frac{l}{l\sqrt{2}} = F\,;\; Y_3 = F_3 \cdot \frac{l}{l\sqrt{2}} = F\,;\; X_4 = F_4 \cdot \frac{l}{l\sqrt{2}} = F = Z_4$$

După descompunerea în componente se calculează, în a doua etapă de calcul, torsorul de reducere în punctul O, originea sistemului de referință. Astfel proiecțiile rezultantei pe cele trei axe vor fi:

$$X = \Sigma X_i = -X_3 + X_4 = 0;$$
$$Y = \Sigma Y_i = -F_2 + Y_3 = 0;$$
$$Z = \Sigma Z_i = -F_1 + Z_4 = 0.$$

adică rezultanta este nulă:

$$\overline{R} = 0.$$

Acum calculăm momentele în raport cu axele sistemului de referință:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -Y_3 \cdot l + Z_4 \cdot l = 0;$$
$$M_y = \Sigma M_{yi} = F_1 \cdot l - X_3 \cdot l = 0;$$
$$M_z = \Sigma M_{zi} = Y_3 \cdot l - X_4 \cdot l = 0.$$

Adică și momentul rezultant în raport cu punctul O este nul:

$$\overline{M_O} = 0\,.$$

Cei doi vectori componenți ai torsorului de reducere în punctul O sunt nuli deci sistemul de forțe este în ***echilibru.***

Problema 14. *Să se calculeze și reprezinte torsorul minim al sistemului de forțe reprezentat în figura 40.. Se cunosc: $F_1 = F_2 = 2F$, $F_3 = 2\sqrt{2}\,F$.*

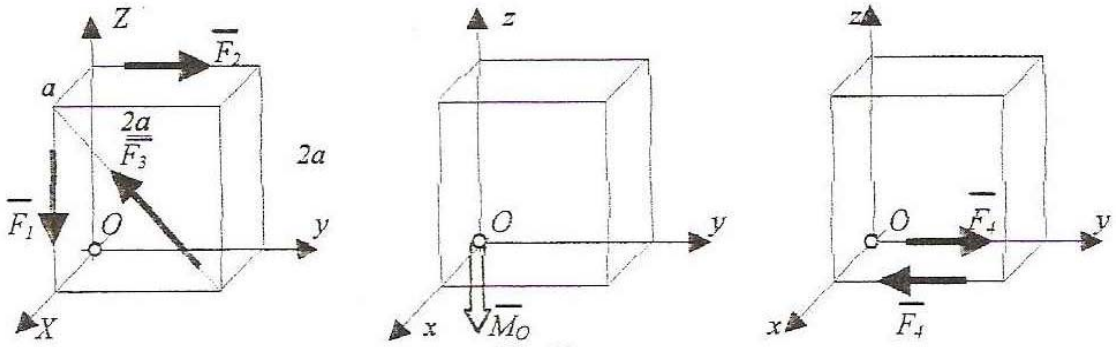


Fig.40.

Rezolvare. *Ca şi la problema precedentă vom descompune forţele în componente, astfel forţa $\overline{F_3}$ va avea două componente:*

$$Y_3 = F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = 2F\,;\; Z_3 = F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = 2F\,;$$

Vom calcula torsorul de reducere în punctul O şi găsim:

$$X = \Sigma X_i = 0\,;\; Y = \Sigma Y_i = F_2 - Y_3 = 0\,;\; Z = \Sigma Z_i = -F_1 + Z_3 = 0\,;$$

deci rezultanta sistemului este:

$$\overline{R} = 0$$

Momentul rezultant va fi:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -F_2 \cdot 2a + Z_3 \cdot 2a = 0;\; M_y = \Sigma M_{yi} = F_1 \cdot a - Z_3 \cdot a = 0\,;$$
$$M_z = \Sigma M_{zi} = -Y_3 \cdot a = -2Fa$$

adică momentul rezultant este:

$$\overline{M_O} = -2Fa\,\overline{k}$$

Aceste rezultate arată că sistemul se reduce la un cuplu având momentul $\overline{M_O}$, cuplu care poate fi reprezentat direct ca un vector moment sau ca un sistem de două forţe egale , paralele şi de sensuri opuse aşezate într-un plan perpendicular pe vectorul moment al cuplului şi convenabil alese ca să rezulte acelaşi moment. Acest cuplu este cel mai simplu sistem echivalent sistemului de forţe dat.

Problema 15. *Să se calculeze şi reprezinte torsorul minim al sistemului de forţe ce acţionează asupra paralelipipedului din figura 41.. Se dau : $F_1 = 6F$, $F_2 = 2F$, $F_3 = 3F$, $F_4 = 4F$.*

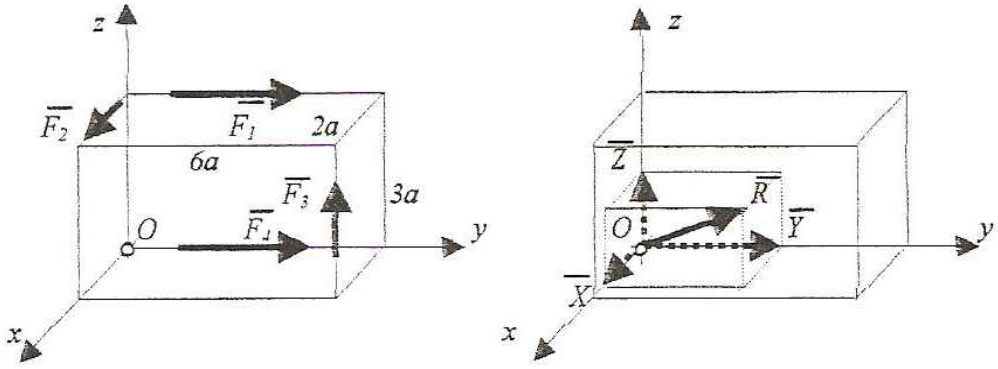


Fig.41.

Rezolvare. *Întrucât forţele sistemului sunt paralele cu axele de referinţă trecem direct la calculul torsorului de reducere în punctul O. Se obţin proiecţiile rezultantei:*

$$X = \Sigma X_i = F_2 = 2F;\ Y = \Sigma Y_i = F_1 + F_4 = 10F;\ Z = \Sigma Z_i = F_3 = 3F$$

adică rezultanta este :

$$\overline{R} = 2F\overline{i} + 10F\overline{j} + 3F\overline{k}$$

având mărimea:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 10{,}63F.$$

Pentru momentul rezultant se calculează momentele forțelor în raport cu axele sistemului de referință:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -F_1 \cdot 3a + F_3 \cdot 6a = 0\ ;$$
$$M_y = \Sigma M_{yi} = F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 2a = 0\ ;$$
$$M_z = \Sigma M_{zi} = 0\ ;$$

deci avem momentul rezultant:

$$\overline{M_O} = 0\ .$$

În această situație sistemul se reduce la ***o rezultantă unică****, calculată mai înainte,* ***care trece prin punctul de reducere****, adică prin punctul O. Această rezultantă este cel mai simplu sistem echivalent al sistemului de forțe dat.*

Problema *16. Să se efectueze reducerea sistemului de forțe din figura 42 , în punctul O și apoi să se reprezinte torsorul minim al sistemului. Sunt date:* $F_1 = 3F$, $F_2 = 5F$, $F_3 = 4\sqrt{5}\,F$.

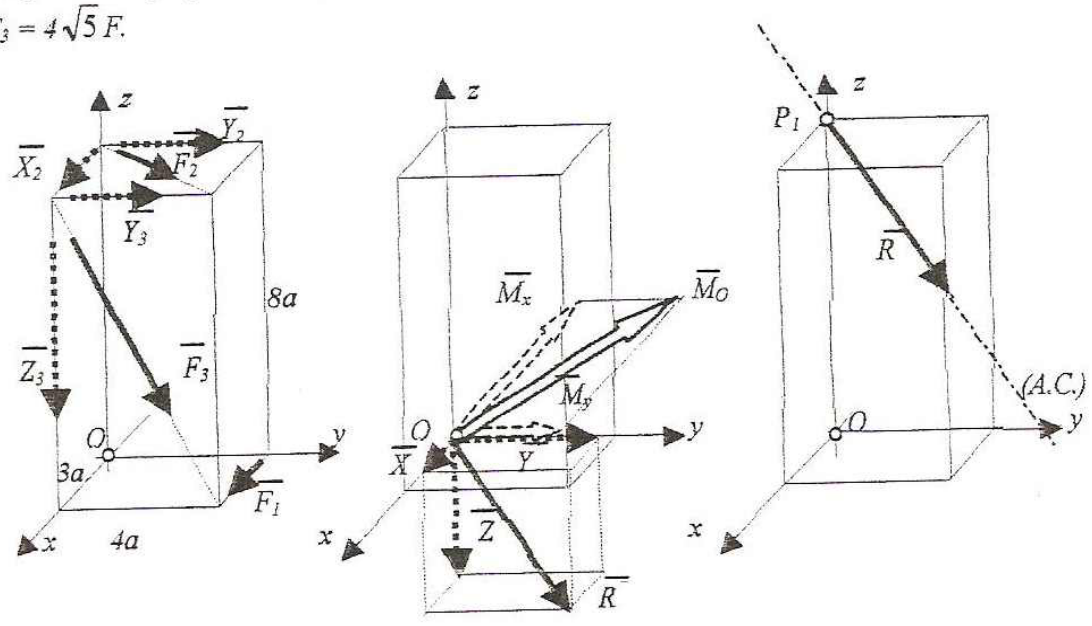


Fig.42.

Rezolvare. *Mai întâi vom descompune forţele* $\overline{F_2}$ *şi* $\overline{F_3}$ *în câte două componente având mărimile:*

$$X_2 = F_2 \frac{3a}{5a} = 3F;\ Y_2 = F_2 \frac{4a}{5a} = 4F;$$

$$Y_3 = F_3 \frac{4a}{4a\sqrt{5}} = 4F;\ Z_3 = F_3 \frac{8a}{4a\sqrt{5}} = 8F;$$

având direcţiile şi sensurile reprezentate în figură.

Proiecţiile rezultantei sistemului se obţin:

$$X = \Sigma X_i = F_1 + X_2 = 6F\ ;\ Y = \Sigma Y_i = Y_2 + Y_3 = 8F\ ;\ Z = \Sigma Z_i = -Z_3 = -8F\ ;$$

adică rezultanta este vectorul:

$$\overline{R} = 6F\,\overline{i} + 8F\,\overline{j} - 8F\,\overline{k}$$

având mărimea:

$$R = 12{,}8F.$$

Momentele în raport cu cele trei axe sunt:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -Y_2 \cdot 8a - Y_3 \cdot 8a = -64Fa;$$
$$M_y = \Sigma M_{yi} = X_2 \cdot 8a + Z_3 \cdot 3a = 48Fa;$$
$$M_z = \Sigma M_{zi} = -F_1 \cdot 4a + Y_3 \cdot 3a = 0;$$

adică momentul rezultant din punctul O este:

$$\overline{M_O} = -64Fa\,\overline{i} + 48Fa\,\overline{j}$$

Faptul că rezultanta şi momentul rezultant sunt diferite de zero arată că ne aflăm în cazul patru de reducere şi deci trebuie să calculăm şi produsul scalar, adică al doilea invariant al sistemului de forţe. Rezultă:

$$\overline{R} \cdot \overline{M_O} = X M_x + Y M_y + Z M_z = 6F \cdot (-64Fa) + 8F \cdot 48Fa + (-8F) \cdot 0 = 0$$

Acest rezultat indică faptul că suntem în cazul în care sistemul se reduce la ***o rezultantă unică ce nu trece prin punctul O.*** *În consecinţă trebuie să determinăm suportul acestei rezultante unice. Acest lucru se face cu ecuaţia axei centrale:*

$$\frac{M_x - yZ + zY}{x} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

unde înlocuind se obţine:

$$\frac{-64Fa - y(-8F) + z8F}{6F} = \frac{48Fa - z6F + x(-8F)}{8F} = \frac{-x8F + y6F}{-8F}$$

Luând rapoartele două câte două şi efectuând produsul mezilor şi extremilor se obţine ecuaţia dreptei care este suportul rezultantei unice:

$$\begin{cases} -800a + 48x + 64y + 100z = 0 \\ 48a - 16y - 6z = 0 \end{cases}$$

Pentru a reprezenta această dreaptă (care este paralelă cu rezultanta din punctul O deoarece rezultanta este invariant) este suficient să reprezentăm un singur punct al ei. De obicei acest punct este intersecţia cu unul din planele de referinţă, de exemplu cu planul yOz. Pentru aceasta anulăm termenul în x din cele două ecuaţii şi se obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute în y şi z care prin rezolvare dau coordonatele punctului căutat:

$$x_1 = 0 ; \qquad \begin{cases} -800a + 64y + 100z = 0 \\ 48a + 6y - 6z = 0 \end{cases} \longrightarrow y_1 = 0 ; z_1 = 8a.$$

Problema 17. *Să se calculeze şi reprezinte torsorul minim al sistemului de trei forţe din figura 43. Se cunosc mărimile forţelor :* $F_1 = 2F$, $F_2 = \sqrt{13}\,F$, $F_3 = 2\sqrt{14}\,F$.

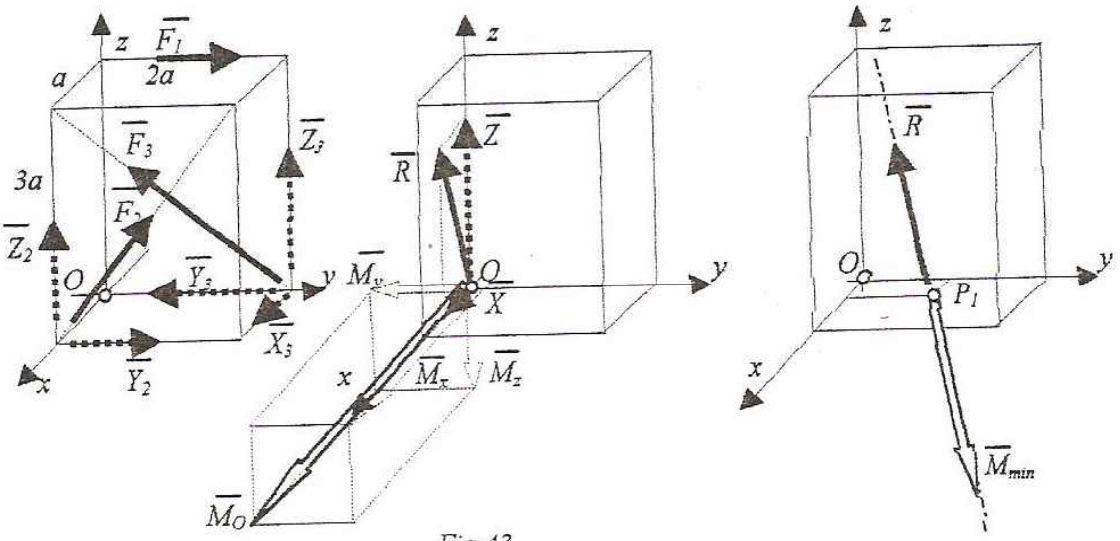


Fig.43.

Rezolvare. *Vom descompune forţele în componente paralele cu axele sistemului de referinţă şi obţinem:*

$$Y_2 = F_2 \frac{2a}{a\sqrt{13}} = 2F ; Z_2 = F_2 \frac{3a}{a\sqrt{13}} = 3F ;$$

$$X_3 = F_3 \frac{a}{a\sqrt{14}} = 2F ; Y_3 = F_3 \frac{2a}{a\sqrt{14}} = 4F ; Z_3 = F_3 \frac{3a}{a\sqrt{14}} = 6F ;$$

Cu acestea calculăm proiecţiile rezultantei sistemului pe cele trei axe:

$$X = \Sigma X_i = X_3 = 2F ; Y = \Sigma Y_i = F_1 + Y_2 - Y_3 = 0 ; Z = \Sigma Z_i = Z_2 + Z_3 = 9F$$

cu alte cuvinte avem rezultanta:

$$\overline{R} = 2F\overline{i} + 9F\overline{k}$$

cu mărimea:

$$R = 9{,}22F.$$

Momentele în raport cu axele sistemului de referință vor fi:

$$M_x = \Sigma M_{xi} = -F_1 \cdot 3a + Z_3 \cdot 2a = 6Fa\ ;$$
$$M_y = \Sigma M_{yi} = -Z_2 \cdot a = -3Fa\ ;$$
$$M_z = \Sigma M_{zi} = Y_2 \cdot a - X_3 \cdot 2a = -3Fa\ ;$$

iar momentul rezultant se va obține:

$$\overline{M_O} = 6Fa\,\overline{i} - 3Fa\,\overline{j} - 3Fa\,\overline{k}$$

Cazul de reducere corespunzător situației în care rezultanta și momentul rezultant sunt diferiți de zero este cazul patru, deci va trebui să calculăm și produsul scalar al celor doi vectori:

$$\overline{R} \cdot \overline{M_O} = XM_x + YM_y + ZM_z = 2F \cdot 6Fa + 9F \cdot (-3Fa) = -15F^2a$$

Acest produs scalar fiind diferit de zero înseamnă că sistemul de forțe se reduce la un torsor minim care este format din rezultanta sistemului și un moment minim coliniar cu ea. Acest moment minim are mărimea:

$$M_{min} = \frac{\overline{R}\,\overline{M}_O}{R} = \frac{-15F^2a}{9{,}22F} = -1{,}62Fa$$

Împreună cu rezultanta acest moment minim formează sistemul care se numește ***dinamă*** *și care se situează pe axa centrală cu ecuația:*

$$\frac{M_x - yZ + zY}{x} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

unde prin înlocuire se obține:

$$\frac{6Fa - y9F + z0}{2F} = \frac{-3Fa - z2F + x9F}{0} = \frac{-3Fa - x0 + y2F}{9F}$$

Prima ecuații se va găsi prin anularea numărătorului celei de a doua fracții iar cea de a doua ecuație prin egalitatea primului raport cu cel de al doilea în care se efectuează produsul mezilor și extremilor:

$$\begin{cases} -3a - 2z + 9x = 0 \\ 60a - 85y = 0 \end{cases}$$

Pentru reprezentarea torsorului minim este suficient să determinăm un singur punct de pe axa centrală, iar acest punct va fi intersecția cu unul din planele sistemului de referință, de exemplu cu planul xOy:

$$z_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0{,}33a \; ; \; y_1 = 0{,}7a.$$

Datorită faptului că momentul minim a rezultat cu semnul minus , acesta are sens invers rezultantei.

Problema 18. *Să se calculeze și reprezinte torsorul minim al sistemului de forțe din figura 44. Mărimile forțelor sunt:* $F_1 = 7F$, $F_2 = 3\sqrt{13}\,F$, $F_3 = 10F$, $F_4 = \sqrt{61}\,F$.

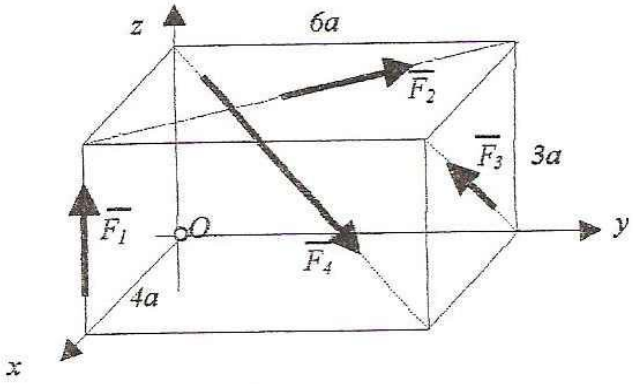


Fig.44.

2.21. Teorema lui Varignon.

Vom reformula teorema lui Varignon , enunțată pentru sisteme de forțe concurente, și în cazul sistemelor de forțe oarecare. Această teoremă va avea enunțul: ***pentru un sistem de forțe care admite ca echivalent cel mai simplu o rezultantă unică, momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul rezultantei sistemului în raport cu același punct.***

Pentru demonstrație vom presupune că sistemul se reduce la o rezultantă unică, iar această rezultantă trece prin punctul A. Momentul rezultant în raport cu acest punct poate fi determinat în funcție de momentul rezultant în raport cu un alt punct oarecare O:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R}$$

Dar cum prin A trece rezultanta unică a sistemului,

torsorul sistemului are momentul nul în acest punct:

$$\overline{M}_A = 0 \longrightarrow \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R} = 0$$

Primul termen este momentul rezultant al sistemului în raport cu punctul O iar al doilea termen dacă este trecut în partea dreaptă şi i se schimbă semnul este chiar momentul rezultantei în raport cu acelaşi punct O:

$$\Sigma\overline{M}_{Oi} = \overline{OA} \times \overline{R}$$

2.22.Sisteme de forţe coplanare.

Vom analiza unele sisteme de forţe particulare punând în evidenţă particularităţile lor. Un astfel de sistem este sistemul de forţe coplanare care prin definiţie ***este sistemul format din forţe situate toate în acelaşi plan.***

Vom presupune că alegem sistemul de referinţă cu planul xOy în planul forţelor.

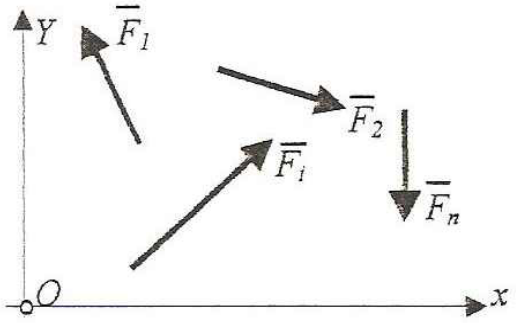


Fig.45.

O forţă oarecare va avea expresia în raport cu acest sistem:

$$\overline{F}_i = X_i\,\overline{i} + Y_i\,\overline{j}$$

iar momentul ei în raport cu originea sistemului va fi:

$$\overline{M}_O(\overline{F}_i) = M_{Oi}\,\overline{k}$$

Cu aceste precizări torsorul sistemului de forţe în punctul O va avea componentele:

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F_i} = X\overline{i} + Y\overline{j} = \Sigma X_i\,\overline{i} + \Sigma Y_i\,\overline{j}$$
$$\overline{M_O} = \Sigma\overline{M_O(F_i)} = (\Sigma M_{Oi})\,\overline{k}$$

Putem observa cu uşurinţă că cei doi vectori sunt perpendiculari şi deci produsul scalar, al doilea invariant la reducere, este nul:

$$\overline{R} \cdot \overline{M_O} = 0$$

Cazurile de reducere care se pot întâlni la sistemele de forţe coplanare sunt:

- *1)* $\overline{R} = 0$; $\overline{M_O} = 0$. *Sistemul de forţe este în* ***echilibru.*** *În acest caz cele două relaţii pot fi privite ca nişte condiţii de echilibru din care se obţin în final condiţiile scalare de echilibru:*

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ \Sigma Y_i = 0\ ;\ \Sigma M_{Oi} = 0\ ;$$

- *2)* $\overline{R} = 0$; $\overline{M_O} \neq 0$. *Sistemul de forţe se reduce la un* ***cuplu.*** *Acest cuplu se poate reprezenta fie ca un sistem de două forţe, paralele, egale şi opuse ca sens, fie prin momentul cuplului reprezentat ca un sens şi definit ca valoare.*

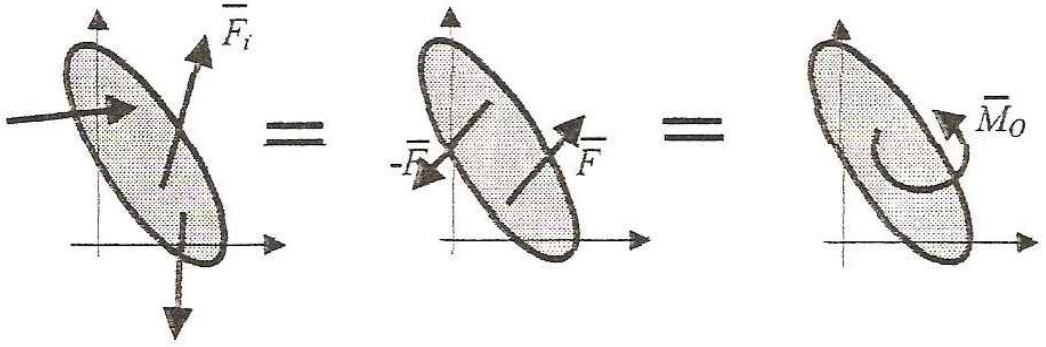


Fig.46.

- *3)* $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M_O} = 0$. *Sistemul echivalent cel mai simplu , sistemului dat, este o* ***rezultantă unică ce trece prin punctul O.***

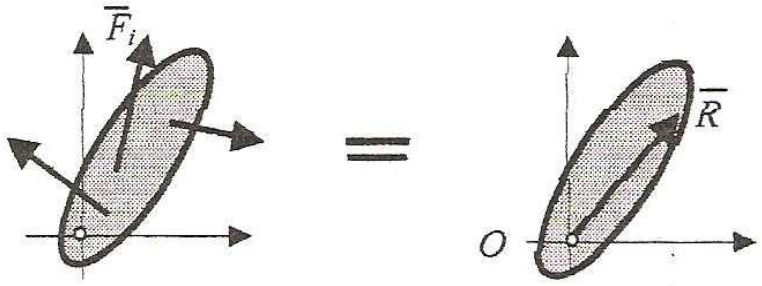


Fig.47.

- *4)* $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$ *şi* $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$ *adică sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin punctul O. Rămâne , în consecință, să determinăm poziția acestei rezultante unice în raport cu sistemul de referință. Prin particularizarea ecuației axei centrale se obține:*

$$M_O - x\,Y + y\,X = 0$$

care este ecuația suportului rezultantei unice.

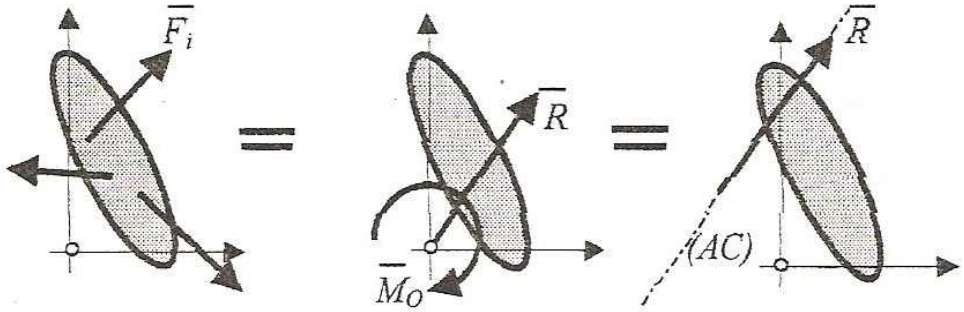


Fig.48.

2.23.Exemplificări.

Problema 19. *Să se reprezinte cel mai simplu sistem echivalent pentru sistemul de forțe coplanare din figura 49. Mărimile forțelor sunt:* $F_1 = 3F$, $F_2 = 2F$, $F_3 = 2\sqrt{2}\,F$, $F_4 = \sqrt{13}\,F$.

Rezolvare. *În prima etapă vom descompune forțele în componente paralele cu axele sistemului de referință, sistem care se alege arbitrar. Se vor obține mărimile:*

$$X_3 = F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = 2F;\ Y_3 = F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = 2F;\ X_4 = F_4 \frac{3a}{a\sqrt{13}} = 3F;$$

$$Y_4 = F_4 \frac{2a}{a\sqrt{13}} = 2F;$$

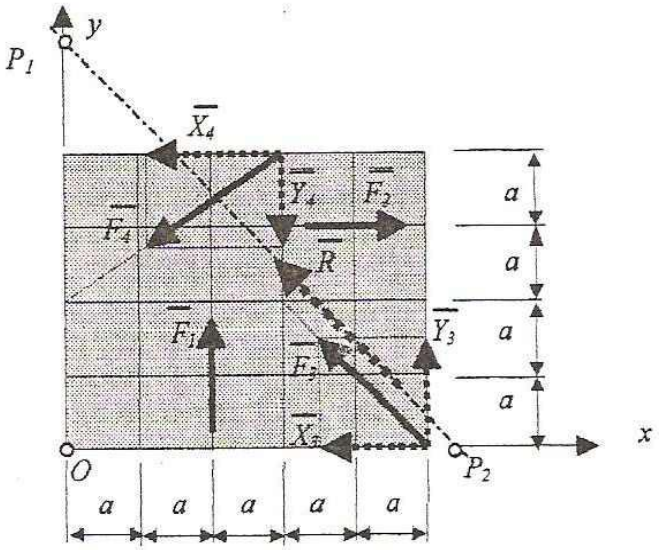


Fig.49.

Rezultanta sistemului va avea proiecțiile pe cele două axe:

$$X = \Sigma X_i = F_2 - X_3 - X_4 = -3F\,;\; Y = \Sigma Y_i = F_1 + Y_3 - Y_4 = 3F\,;$$

cu expresia:

$$\overline{R} = -3F\,\overline{i} + 3F\,\overline{j}$$

și mărimea :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4{,}24F.$$

Vom calcula acum momentul rezultant în raport cu punctul O , originea sistemului de referință:

$$M_O = \Sigma M_{Oi} = F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 3a + Y_3 \cdot 5a + X_4 \cdot 4a - Y_4 \cdot 3a = 16Fa.$$

Fiind vorba de cazul patru de reducere, adică sistemul reducându-se la o rezultantă unică ce nu trece prin punctul O vom căuta suportul acestei rezultante:

$$M_O - x\,Y + y\,X = 0$$

sau înlocuind și simplificând cu F avem:

$$16a - x\,3 + y\,(-3) = 0$$

Reprezentarea se face prin tăieturi şi anume:

$x_1 = 0 \longrightarrow y_1 = 5{,}33a;\ \ y_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 5{,}33a.$

Trebuie făcută precizarea că în figura 49 sunt reprezentate trei sisteme echivalente şi anume: sistemul iniţial dat şi format din cele patru forţe, sistemul componentelor format din şase forţe dar cu direcţii paralele cu axele sistemului de referinţă ţi în sfârşit rezultanta unică, cel având evident acelaşi efect asupra corpului pe care acţionează.

Problema 20. *Să se calculeze şi reprezinte cel mai simplu sistem echivalent sistemului de forţe coplanare din figura 50 şi alcătuit din forţele:* $F_1 = 6F$, $F_2 = 2\sqrt{13}\,F$, $F_3 = 3\sqrt{10}\,F$, $F_4 = 4\sqrt{5}\,F$.

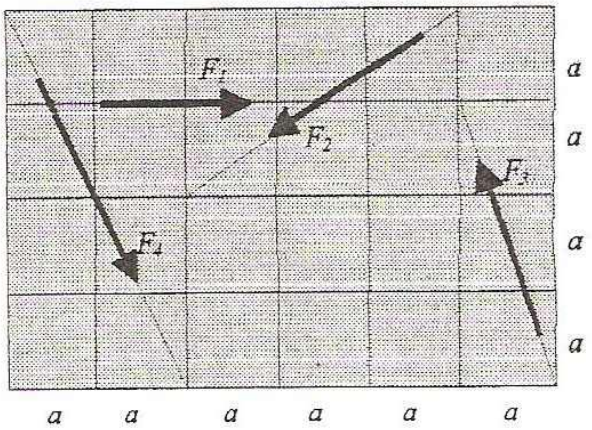


Fig.50.

2.24.Sisteme de forţe paralele. Centrul forţelor paralele.

Un alt sistem particular de forţe este sistemul de forţe paralele care este ***sistemul format din forţe cu suporturile paralele.***

Să presupunem că suporturile forţelor sunt paralele cu axa Oz (putem alege sistemul de referinţă cum dorim noi şi deci axa Oz paralelă cu direcţia comună a forţelor). Una din forţele sistemului va avea expresia în raport cu acest sistem:

$$\overline{F_i} = F_i\,\overline{k}$$

iar momentul forţei în raport cu originea sistemului va fi:

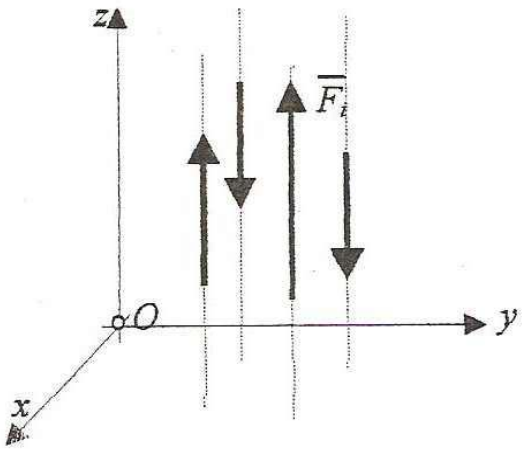


Fig.51.

$$\overline{M_O}(\overline{F_i}) = M_{xi}\,\overline{i} + M_{yi}\,\overline{j}$$

Efectuând reducerea sistemului de forțe în punctul O (originea sistemului de referință) vom obține vectorii:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F_i} = (\Sigma F_i)\,\overline{k}$$
$$\overline{M_O} = \Sigma \overline{M_O}(\overline{F_i}) = M_x\,\overline{i} + M_y\,\overline{j}$$

Constatăm că cei doi vectori sunt perpendiculari şi deci avem:

$$\overline{R} \cdot \overline{M_O} = 0$$

Vom deosebi următoarele cazuri de reducere:

- *1)* $\overline{R} = 0$, $\overline{M_O} = 0$. *Sistemul de forțe este în echilibru. Condițiile scalare de echilibru sunt:*

$$\Sigma F_i = 0\,,\ \Sigma M_{xi} = 0\,,\ \Sigma M_{yi} = 0.$$

- *2)* $\overline{R} = 0$, $\overline{M_O} \neq 0$. *Sistemul se reduce la un cuplu de forțe. Interesant este că sistemul de forțe paralele poate fi înlocuit cu un alt sistem de forțe paralele dar având o cu totul altă direcție a forțelor. Acest lucru se datorează proprietății cuplului de forțe şi anume de a fi rotit în planul cuplului fără modificarea efectului asupra corpului pe care acționează.*

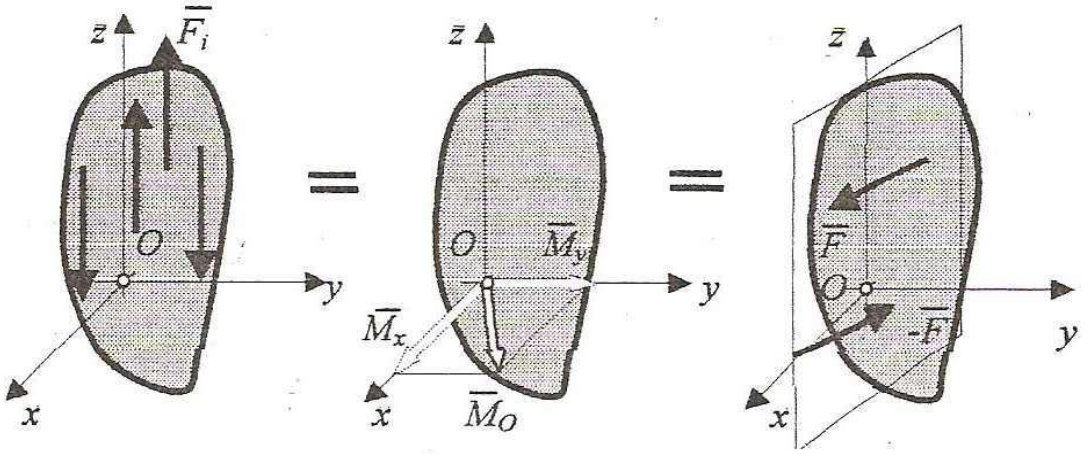


Fig.52.

- *3)* $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. *Sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică ce trece prin punctul O. Această rezultantă este cel mai simplu sistem echivalent sistemului de forțe dat.*

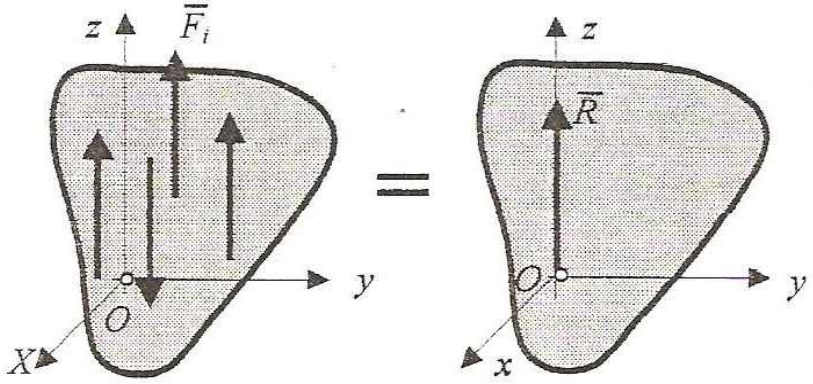


Fig.43.

- *4)* $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ *şi* $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$. *Sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin punctul O. În consecință vom determina poziția acestei rezultante cu ajutorul ecuației axei centrale. Prin particularizarea ecuației se va obține:*

$$x = -\frac{\Sigma M_{yi}}{\Sigma F_i}; y = \frac{\Sigma M_{xi}}{\Sigma F_i};$$

Putem observa cu uşurință că aceste două relații definesc coordonatele punctului de intersecție dintre suportul rezultantei şi planul

xOy (punctul A).

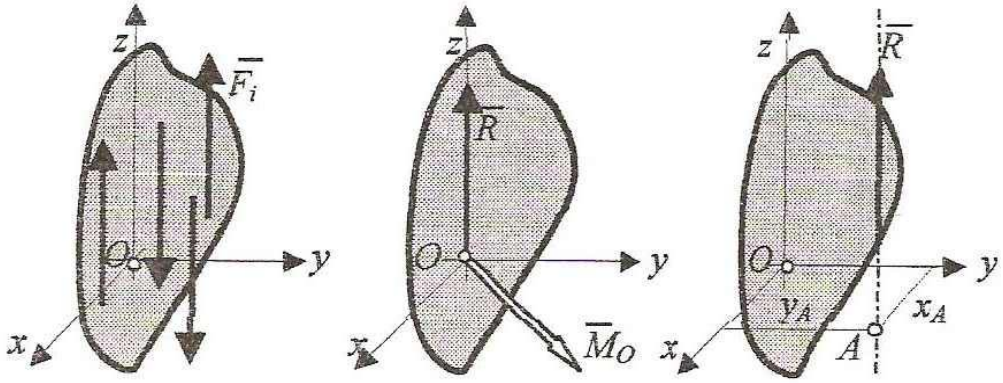


Fig.54.

Un caz particular de sisteme de forțe paralele este cel al forțelor paralele vectori legați. Adică forțele sistemului au punctele de aplicație bine definite.

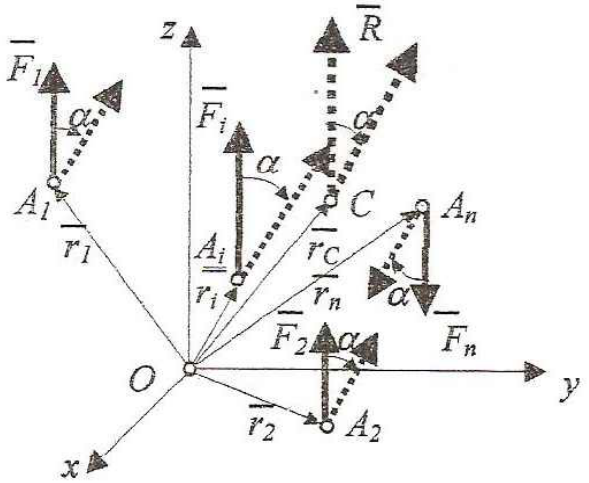


Fig.55.

La un astfel de sistem se pot enunța două proprietăți:

- *1)Dacă forțele sistemului sunt vectori legați atunci și rezultanta sistemului (dacă există) este un vector legat iar punctul de aplicație al rezultantei se numește* ***centrul forțelor paralele.***
- *2)Dacă toate forțele sistemului se rotesc cu același unghi în jurul punctelor lor de aplicație (sistemul de forțe rămânând un sistem de forțe paralele) atunci și rezultanta se rotește cu același unghi în jurul centrului forțelor paralele.*

Vom folosi aceste două proprietăți pentru determinarea centrului forțelor paralele. Să considerăm un sistem de forțe paralele, vectori legați, care se reduc la o rezultantă unică. Pentru un astfel de sistem putem scrie teorema lui Varignon, adică:

$$\Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O(\overline{R})$$

sau exprimând momentele:

$$\Sigma \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{r}_C \times \overline{R}$$

Considerând forțele paralele cu axa Oz și aducând ambii termeni ai relației în aceeași parte a relației se obține:

$$\Sigma \overline{r}_i \times F_i \overline{k} - \overline{r}_C \times R\,\overline{k} = 0$$

Cunoaștem că scalarii F_i și R pot multiplica oricare din cei doi vectori ai produsului vectorial, astfel că relația se transformă după ce înlocuim și mărimea rezultantei cu suma mărimilor forțelor sistemului:

$$\Sigma \overline{r}_i F_i \times \overline{k} - \overline{r}_C (\Sigma F_i) \times \overline{k} = 0$$

Acum vom da factor comun vectorul $\overline{k}$ și în final se obține:

$$[\Sigma \overline{r}_i F_i - \overline{r}_C (\Sigma F_i)] \times \overline{k} = 0$$

Acest produs vectorial poate fi nul în trei situații: dacă unul din cei doi vectori ai produsului este nul, sau dacă cei doi vectori sunt coliniari. Cum se vede, al doilea vector este de fapt un versor deci nu poate fi nul. Pe de altă parte dacă cei doi vectori (paranteza și versorul) sunt coliniari se poate remarca faptul că în baza proprietății enunțate sistemul se poate roti cu un unghi fără a schimba pozițiile punctelor de aplicație și deci coliniaritatea celor doi vectori nu mai este îndeplinită și deci nu anulează relația. Rămâne în consecință doar cazul când primul vector este nul, adică dacă vectorul de poziție al centrului forțelor paralele are expresia:

$$\overline{r}_C = \frac{\Sigma \overline{r}_i F_i}{\Sigma F_i}$$

Exprimând pozițiile punctelor în raport cu un sistem de referință cartezian se obțin coordonatele centrului forțelor paralele:

$$x_C = \frac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i};\ y_C = \frac{\Sigma y_i F_i}{\Sigma F_i};\ z_C = \frac{\Sigma z_i F_i}{\Sigma F_i}.$$

Capitolul 3.Centre de greutate.

3.1.Introducere.

Un caz particular de sisteme de forțe paralele vectori legați îl constituie sistemul forțelor de greutate.

În cazul în care corpurile, sau sistemele de puncte materiale, sunt cu dimensiuni neglijabile în raport cu raza pământului și se află în vecinătatea suprafeței pământului putem considera că sunt acționate de un sistem de forțe paralele, aceste forțe fiind forțele de atracție exercitate de către Pământ asupra lor și numindu-se forțe de greutate. Aceste forțe pot fi exprimate în funcție de masele punctelor materiale:

$$\overline{G_i} = m_i \cdot \overline{g}$$

unde g este vectorul accelerație gravitațională, vector ce poate fi considerat constant în mărime, direcție și sens. Mărimea acestei accelerații se va considera în aplicațiile uzuale:

$$g = 9{,}81\ m/s^2$$

3.2.Centre de greutate.

Să presupunem un sistem de puncte materiale A_i de mase m_i și un sistem de referință cartezian Oxyz. Forțele de greutate considerate a fi paralele, acționând în punctele respective și având toate același sens, vor avea o rezultantă, greutatea totală a sistemului de puncte materiale și care are punctul de aplicație în centrul forțelor paralele de greutate numit ***centrul de greutate*** *al sistemului.*

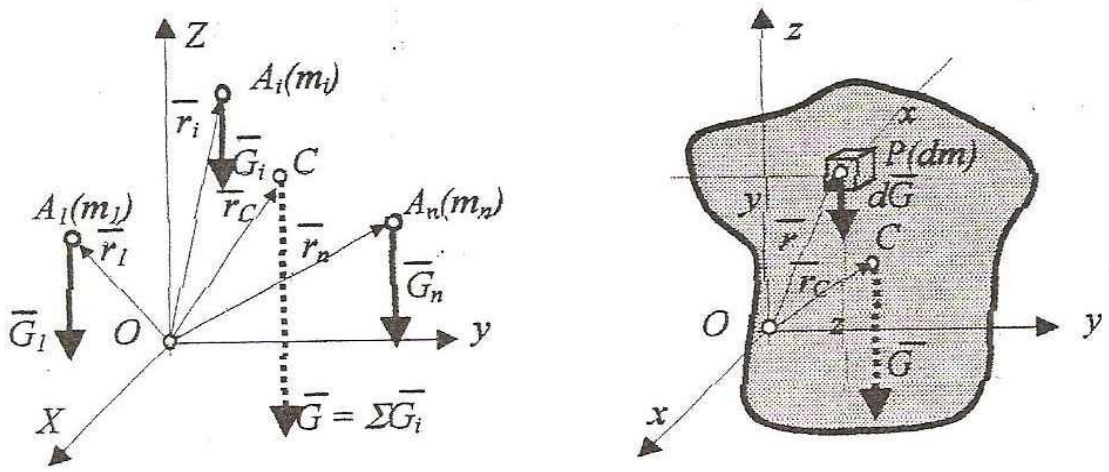


Fig.1.

Conform celor prezentate în capitolul precedent, poziția centrului de greutate va fi dată de relația cunoscută în care înlocuim forțele ce greutățile punctelor materiale:

$$\overline{r_C} = \frac{\Sigma\overline{r_i}G_i}{\Sigma G} = \frac{\Sigma\overline{r_i}m_i g}{\Sigma m_i g} = \frac{\Sigma\overline{r_i}m_i}{\Sigma m_i}$$

Cum se observă, pentru sistemele de puncte îndeplinind condițiile enunțate, centrul de greutate se află în același loc cu ***centrul de masă.***

Să considerăm acum un solid rigid. Un corp poate fi considerat un sistem continuu de puncte materiale şi anume un sistem de elemente infinitezimale de mase ***dm*** *numite* ***mase elementare*** *tinzând cu mărime ala zero. Astfel numărul acestor elemente tinde la infinit. Fiecare astfel de element va fi acționat de o forță de greutate elementară:*

$$d\overline{G} = \overline{g}\,.\,dm$$

Folosind aceiaşi relație în care suma finită se transformă în sumă infinită, adică în integrală, se obține poziția centrului de greutate pentru un corp:

$$\overline{r_C} = \frac{\int_V \overline{r}dG}{\int_V dG} = \frac{\int_V \overline{r}gdm}{\int_V gdm} = \frac{\int_V \overline{r}dm}{\int_V dm}$$

Coordonatele centrului de greutate pentru sisteme de puncte materiale şi pentru solidul rigid sunt:

$$x_C = \frac{\Sigma x_i m_i}{\Sigma m_i}; \; y_C = \frac{\Sigma y_i m_i}{\Sigma m_i}; \; z_C = \frac{\Sigma z_i m_i}{\Sigma m_i};$$

$$x_C = \frac{\int_V x dm}{\int_V dm}; \; y_C = \frac{\int_V y dm}{\int_V dm}; \; z_C = \frac{\int_V z dm}{\int_V dm}.$$

3.3.Momente statice.

Numărătorii fracţiilor care definesc coordonatele centrului de greutate poartă numele de ***momente statice*** *în raport cu planele sistemului de referinţă. Prin definiţie momentele statice sunt* ***mărimi scalare egale cu sumele de produse dintre masele şi coordonatele în raport cu un reper considerat.*** *Astfel , în raport cu planele de referinţă ale unui sistem cartezian, vom nota momentele statice (pentru un sistem de puncte materiale şi pentru un corp):*

$$S_{xOy} = \Sigma z_i \cdot m_i \; ; \; S_{yOz} = \Sigma x_i \cdot m_i \; ; \; S_{xOz} = \Sigma y_i \cdot m_i \; ;$$
$$S_{xOy} = \int_V z.dm \; ; \; S_{yOz} = \int_V x.dm \; ; \; S_{xOz} = \int_V y.dm \, .$$

Vom enunţa o teoremă ce poartă denumirea de ***teorema momentelor statice: momentul static al unui corp sau al unui sistem de puncte materiale poate fi calculat ca produs între masa totală a corpului, sau sistemului de puncte materiale, şi coordonata corespunzătoare a centrului de greutate (sau de masă):***

$$S_{xOy} = M \cdot z_C \; ; \; S_{yOz} = M \cdot x_C \; ; \; S_{xOz} = M \cdot y_C$$

unde am notat:

$$M = \Sigma m_i \; ; \; M = \int_V dm$$

Demonstraţia se face observând că numărătorii fracţiilor ce definesc poziţia centrului de greutate reprezintă momentele statice, iar numitorul masa totală.

Pe lângă importanţa directă a teoremei în calculul

momentelor statice, teorema mai este folositoare şi prin consecinţa ei, care se enunţă în modul următor: ***un corp sau un sistem de puncte materiale care admite un plan, o axă sau un punct de simetrie are centrul de greutate situat în acel plan, pe acea axă sau în punctul de simetrie.***

Pentru demonstraţia afirmaţiei vom considera că sistemul are un plan de simetrie. Să notăm acest plan xOz iar distanţele egale până la centrele de greutate ale celor două jumătăţi simetrice ce ***d*** *, iar coordonatele acestora vor fi:*

$$y_{Cs} = -y_{Cd} = d$$

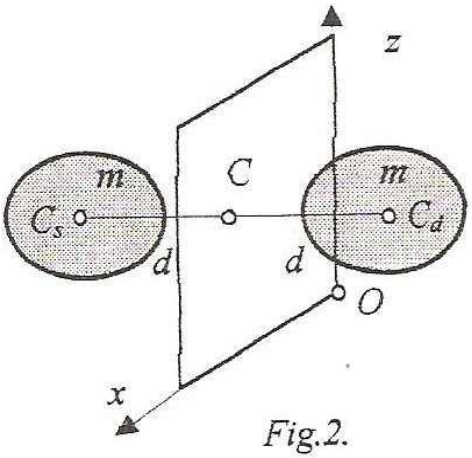


Fig.2.

Masele celor două jumătăţi ale sistemului (sau corpului) sunt de asemenea egale. Putem calcula momentul static în raport cu planul de simetrie:

$$S_{xOz} = m \cdot d + m \cdot (-d) = 0$$

În acelaşi timp momentul static poate fi calculat (în baza teoremei momentelor statice) şi astfel:

$$S_{xOz} = 2m \cdot y_C$$

de unde rezultă că:

$$y_C = 0.$$

adică centrul de greutate al întregului este chiar în planul de simetrie.

În acelaşi mod se demonstrează şi faptul că centrul de greutate se află pe axa de simetrie sau în punctul de simetrie.

3.4. Centre de greutate pentru corpuri omogene.

Pentru corpurile omogene (corpuri la care distribuţia masei este uniformă) vom da relaţii de calcul al centrului de greutate considerând cele trei schematizări ale corpurilor, adică pentru bare, plăci şi volume omogene.

- ***Bare omogene.*** *Presupunând o bară omogenă cu o distribuţie uniformă pe lungimea barei putem exprima proprietatea de omogeneitate în modul următor:*

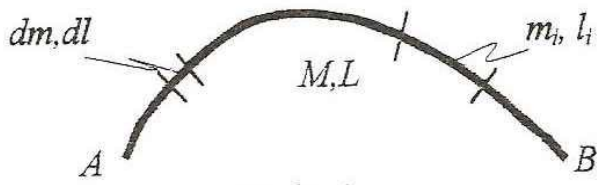


Fig.3.

$$\mu_L = \frac{M}{L} = \frac{m_i}{l_i} = \frac{dm}{dl}$$

relaţie care reprezintă ***masa specifică*** *a barei şi anume faptul că raportul mas, lungime este acelaşi indiferent de partea care se consideră din bară. Din această relaţie rezultă:*

$$dm = \mu_L \cdot dl = \frac{M}{L} \cdot dl$$

Înlocuind în relaţiile coordonatelor centrului de greutate şi simplificând cu masa specifică (ce iese de sub integrală) se obţin coordonatele centrului de greutate pentru o bară omogenă:

$$x_C = \frac{\int_L xdl}{\int_L dl} \; ; \; y_C = \frac{\int_L ydl}{\int_L dl} \; ; \; z_C = \frac{\int_L zdl}{\int_L dl}.$$

În aceste relații integralele sunt curbilinii și se efectuează pe toată lungimea barei.

- ***Plăci omogene.*** *Pentru o placă omogenă cu distribuție uniformă pe suprafața plăcii putem scrie:*

$$\mu_S = \frac{M}{A} = \frac{m_i}{A_i} = \frac{dm}{dA}$$

reprezentând masa specifică (raportul dintre masa și suprafața corespunzătoare) a plăcii și de unde vom exprima masa elementară:

$$dm = \mu_A \cdot dA = \frac{M}{A} \cdot dA$$

În final se obțin coordonatele centrului de greutate pentru o placă omogenă:

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \; ; \; y_C = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \; ; \; z_C = \frac{\int_A z dA}{\int_A dA}.$$

- ***Volume omogene.*** *Masa specifică (raportul dintre masă și volumul corespunzător) numită și* ***densitate*** *are expresia:*

$$\mu = \frac{M}{V} = \frac{m_i}{V_i} = \frac{dm}{dV}$$

de unde masa elementară va fi:

$$dm = \mu \cdot dV = \frac{M}{V} \cdot dV$$

și cu care rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} \; ; \; y_C = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV} \; ; \; z_C = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV}.$$

Putem observa că în cazul corpurilor omogene centrul de greutate , sau de masă, devine un centru de greutate geometric, în relații intervenind numai elementele geometrice ale corpurilor: lungime, arie sau volum.

3.5. Centre de greutate pentru corpuri compuse.

În cazul în care corpurile pot fi considerate a fi obținute prin însumarea, sau diferența unor corpuri simple, pentru care se cunosc elementele geometrice și poziția centrului de greutate, acest lucru se poate folosi pentru determinarea poziției centrului de greutate pentru întregul corp. Pentru exemplificare vom arăta cum se determină poziția centrului de greutate pentru o placă omogenă de formă oarecare și de arie totală A.

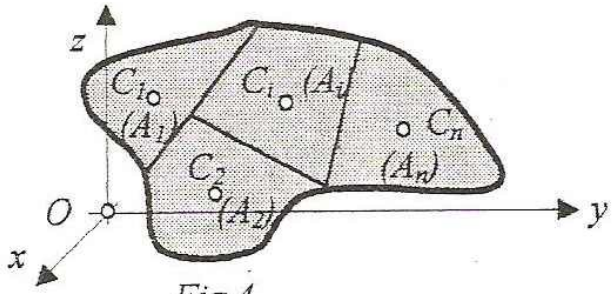


Fig.4.

Considerăm că am împărțit corpul în corpuri mai simple pentru care se cunosc ariile și pozițiile centrelor de greutate. Coordonata x_C a centrului de greutate al întregii plăci se calculează:

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{A_1} x dA + \ldots + \int_{A_i} x dA + \ldots + \int_{A_n} x dA}{\int_{A_1} dA + \ldots + \int_{A_i} dA + \ldots + \int_{A_n} dA} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i}$$

Relația se obține datorită faptului că dacă domeniul de integrare poate fi considerat ca o sumă de domenii, atunci integrala se poate calcula ca o sumă de integrale pe fiecare domeniu separat, termenii da la numărător rezultând a fi momentele statice ale figurilor simple în care am împărțit corpul, momente statice care în baza teoremei momentelor statice se calculează ca produs între aria corpului și coordonata

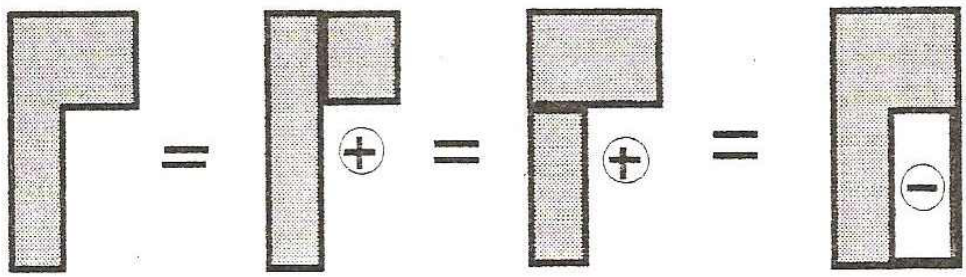
corespunzătoare a centrului de greutate, iar termenii de la numitor sunt chiar ariile plăcilor simple. În acelaşi mod se obţin şi celelalte coordonate:

$$y_C = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i}; z_C = \frac{\Sigma z_i A_i}{\Sigma A_i}$$

şi evident în acelaşi mod se obţine poziţia centrului de greutate pentru o bară sau un volum compus.

În consecinţă pentru determinarea centrului de greutate pentru o placă plană compusă se va proceda în felul următor:

- *1)Se împarte placa în plăci simple pentru care se cunosc ariile şi poziţiile centrelor de greutate. De menţionat faptul că împărţirea nu este unică, pentru fiecare placă existând mai multe modalităţi de împărţire. Pentru exemplificare să considerăm placa omogenă din figura 5. Se poate observa cu uşurinţă faptul că această figură poate fi considerată ca o sumă de două dreptunghiuri (ca în figura 5.b şi 5.c) sau o diferenţă de două dreptunghiuri.*



a) *b)* *c)* *d)*

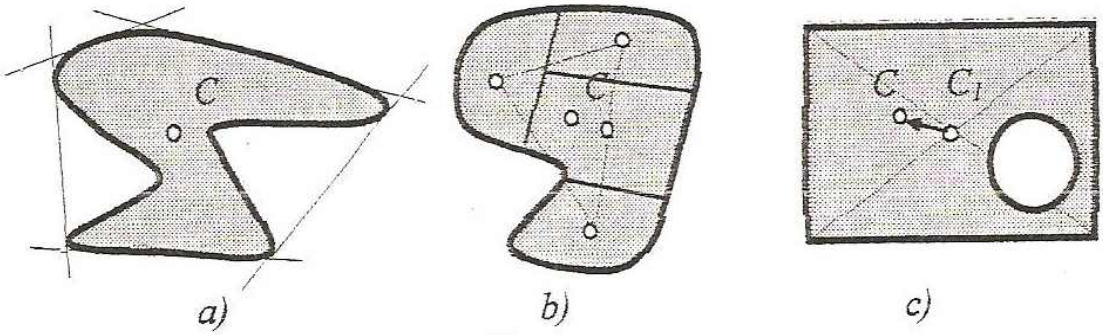
Fig.5.

- *2)Se alege un sistem de referinţă convenabil. Prin sistem de referinţă convenabil vom înţelege acel sistem care aduce cele mai multe simplificări în calcul. Pentru s avea toate coordonatele pozitive acest sistem poate fi tangent la corpul dat astfel încât să se situeze în cadranul unu. Pentru a obţine o simplificare a calculului, sistemul poate fi ales cu axele trecând prin cât mai multe centre ale figurilor simple. Astfel unele coordonate vor fi nule iar calculul se va simplifica. În cazul în care corpul are o axă de simetrie se va alege acea axă drept axă de referinţă şi în consecinţă calculul se va reduce deoarece centrul de greutate se află pe acea axă şi este necesar să se calculeze o singură coordonată.*

- *3)În raport cu acest sistem se calculează coordonatele centrelor figurilor simple. Coordonatele se obţin ca sume sau diferenţe de distanţe. Face, remarca următoare: pentru corpurile care se scad coordonatele nu sunt afectate de această operaţie, se vor calcula ca şi când corpurile s-ar aduna.*
- *4)Se calculează ariile şi momentele statice pentru fiecare corp şi apoi aria totală şi momentele statice totale ale plăcii în raport cu cele două axe de referinţă. Calculele de obicei se realizează într-un tabel cere se prezintă astfel:*

Fig.	A_i	X_i	Y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1					
...					
Total	ΣA_i			$\Sigma A_i \cdot x_i$	$\Sigma A_i \cdot y_i$

- *5)Se calculează coordonatele centrului de greutate folosind relaţiile găsite.*
- *6)Se verifică plauzibilitatea centrului determinat. Remarcăm faptul că o verificare exactă se poate face refăcând calculul, eventual în raport cu un alt sistem de referinţă sau cu o altă împărţire a figurii în figuri simple. O primă verificare este aceea că centrul de greutate trebuie să se afle în interiorul figurii rezultate prin trasarea tuturor tangentelor posibile la figura dată. A doua verificare, adevărată numai pentru corpurile obţinute prin însumare, este ca centrul de greutate să se găsească în interiorul poligonului obţinut prin unirea centrelor figurilor simple. În sfârşit la corpurile cu goluri centrul de greutate „fuge" de gol. Acest lucru înseamnă că, de exemplu, dacă centrul plăcii fără gol este în C_1 (vezi figura 6.c) atunci prin practicarea golului, centrul de greutate se deplasează în sens invers locului în care s-a realizat golul.*



a) b) c)

Fig.6.

Metoda prezentată implică însă cunoaşterea, sau determinarea în prealabil, a poziţiilor centrelor de greutate pentru unele corpuri simple uzuale.

3.6. Centre de greutate pentru corpuri simple uzuale.

Vom determina în continuare poziţiile centrelor de greutate pentru câteva corpuri mai des folosite în aplicaţii.

Bara rectilinie. *Fie o bară rectilinie de lungime L.*

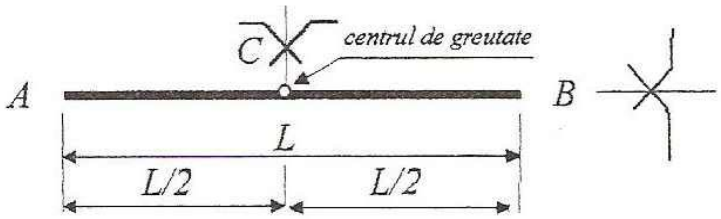


Fig.7.

Întrucât bara rectilinie prezintă un centru de simetrie (sau două axe de simetrie) la jumătatea barei, tot acolo se va afla şi centrul de greutate al ei. Astfel centrul de greutate pentru o bară rectilinie se găseşte ***la jumătatea distanţei dintre extremităţile barei.***

Bara arc de cerc. *Să considerăm acum o bară în formă de arc de cerc, cerc având centrul în O şi raza R. Lungimea arcului L se poate exprima în funcţie de unghiul la centrul:*

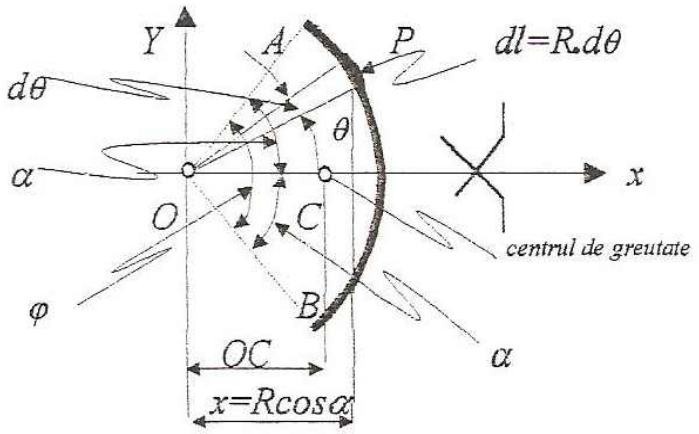


Fig.8.

$$L = R \cdot \varphi_{(radiani)}$$

Întrucât arcul de cerc este figură simetrică având ca axă de simetrie bisectoarea unghiului la centru, centrul de greutate al arcului se va găsi pe acea bisectoare undeva între centrul cercului şi arcul de cerc. În consecinţă pentru cunoaşterea poziţiei centrului de greutate al arcului de cerc este suficient să determinăm distanţa OC de la centrul cercului până la acest centru.

Vom considera un sistem de referinţă cu originea în centrul cercului şi cu axa Ox bisectoarea unghiului la centru. Avem de determinat numai coordonata :

$$OC = x_C = \frac{\int_L x dl}{\int_L dl}$$

relaţie în care numitorul este chiar lungimea arcului şi deci rămâne să calculăm momentul static de la numărător.

Pentru calculul numărătorului se alege mai întâi în punctul P o lungime elementară ***dl****. În vederea unui calcul mai simplu se preferă transformarea în coordonate polare , adică poziţia punctului se va exprima prin distanţa (R) de originea sistemului şi unghiul făcut de raza dusă la punctul P cu o direcţie dată, de exemplu unghiul θ în raport cu axa Ox. Cu acestea coordonata x a punctului P devine:*

$$X = R \cdot \cos\theta$$

iar lungimea elementară:

$$Dl = R \cdot d\theta$$

Înlocuind în relaţia de mai înainte se obţine:

$$x_C = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta . d\theta}{R.\varphi} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

În concluzie centrul de greutate al unui arc de cerc se

află pe ***bisectoarea unghiului la centru , la o distanță*** $OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ ***de la centrul cercului , și unde*** α ***este jumătate din unghiul la centru exprimat în radiani.***

Placa dreptunghiulară. *O placă dreptunghiulară cu laturile b și h (Fig.9.) prezintă un centru de simetrie (intersecția celor două axe de simetrie) și deci centrul plăcii dreptunghiulare se va afla la* ***jumătatea distanței dintre două laturi paralele.***

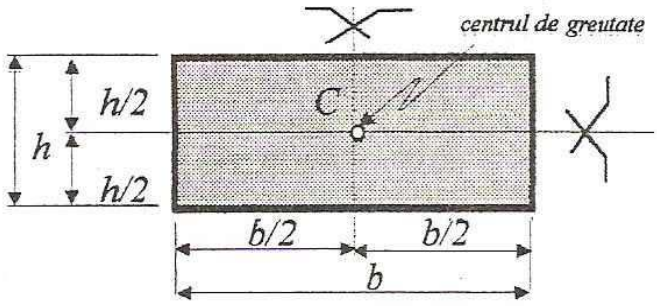


Fig.9.

Placa triunghi dreptunghic. *Pentru determinarea centrului de greutate al unui triunghi dreptunghic vom alege ca sistem de referință sistemul coliniar cu catetele triunghiului. Observăm că triunghiul dreptunghic are aceeași poziție în raport cu ambele axe și anume are o catetă pe o axă și cealaltă perpendiculară pe axă. Deci vom calcula o singură coordonată iar cealaltă se va obține schimbând x cu y și b cu h.*

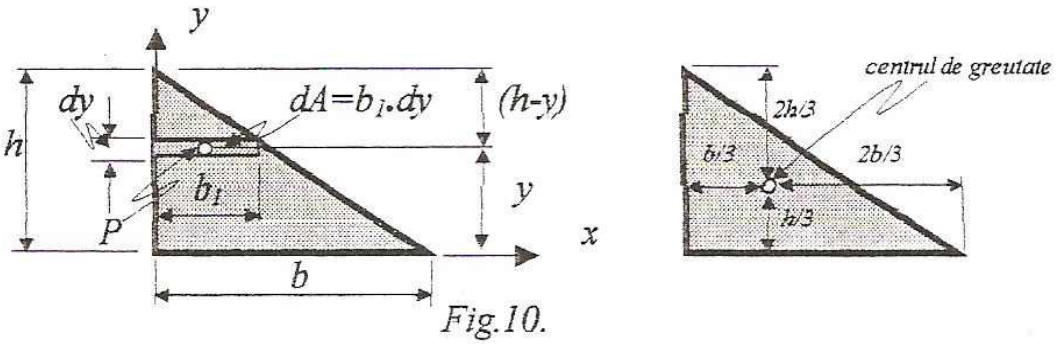


Fig.10.

Vom calcula coordonata:

$$y_C = \frac{\int_A y.dA}{\int_A dA}$$

unde numitorul este aria triunghiului iar numărătorul se va calcula alegând în primul rând un element de arie infinitezimal. Avem interesul de a calcule cât mai simplu acest moment static şi deci vom încerca să înlocuim integrala dublă (de suprafaţă) cu o integrală simplă.

Pentru că relaţia a fost găsită din considerarea corpului ca un sistem de puncte materiale, elementul de arie trebuie să îndeplinească condiţia de punct şi ca arie şi ca moment static în raport cu axa Ox, adică trebuie să tindă către zero ca arie şi să fie egal cu produsul dintre arie şi coordonata centrului ca moment static. Aceste condiţii pot fi îndeplinite şi dacă se alege un element de arie de forma unei bare paralele cu axa Ox (bara are arie nulă ca şi punctul). În consecinţă în punctul P de coordonată y vom alege un element de arie de înălţime dy (tinzând către zero)care se poate asimila cu un dreptunghi de bază b_1. Aria acestui element va fi:

$$dA = b_1 \cdot dy$$

unde pentru a avea o singură variabilă sub semnul integralei se va exprima b_1 în funcţie de y prin scrierea unei relaţii de asemănare în cele două triunghiuri dreptunghice formate: primul cu baza b_1 şi înălţimea (h-y) şi al doilea cu baza b şi înălţimea h:

$$\frac{b_1}{h-y} = \frac{b}{h} \longrightarrow b_1 = \frac{b}{h}(h-y)$$

Înlocuind în integrală se obţine coordonata centrului de greutate:

$$y_C = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h y(h-y)dy}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

În final putem spune că centrul de greutate al unui triunghi dreptunghic se află ***la o treime din catetă în raport cu cealaltă catetă sau la două treimi din catetă până în dreptul vârfului.***

Placa sector de cerc. *Vom considera un sector de cerc cu raza R şi unghi la centru φ. Ca şi arcul de cerc şi sectorul de cerc este figură simetrică având ca axă de simetrie bisectoarea unghiului la centru , în concluzie centrul de greutate al sectorului se va afla pe această*

bisectoare. Rămâne deci de calculat distanța OC de la centrul cercului la centrul de greutate al sectorului de cerc.

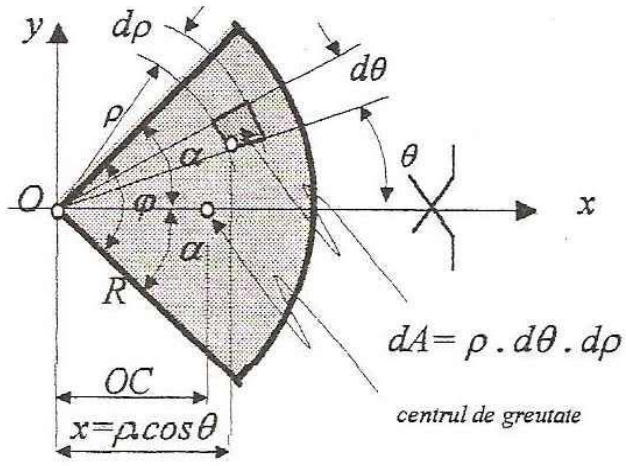


Fig.11.

Alegând sistemul d referință cu axa Ox coliniară cu axa de simetrie avem :

$$OC = x_C = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

unde numitorul este aria sectorului de cerc:

$$A = \frac{\varphi(rad)}{2} R^2 = \alpha_{(rad)} \cdot R^2$$

Iar pentru calculul numărătorului vom exprima atât coordonata x a punctului oarecare P în coordonate polare cât şi elementul de arie. Se observă că elementul de arie se obține dând câte o creştere infinitezimală (dρ) şi (dθ) coordonatei ρ şi unghiului θ. Cu acestea se obține elementul de arie care se poate asimila unui mic dreptunghi cu baza egală cu lungimea arcului de cerc de rază ρ şi unghi la centru dθ. Avem :

$$dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

Vom înlocui acum în expresia coordonatei x_C şi cunoscând faptul că integrala unui produs de două funcții de două variabile

independente este egală cu produsul integralelor simple din cele două funcții, se va obține:

$$x_C = \frac{\int_A \rho.\cos\theta.\rho.d\theta.d\rho}{\alpha R^2} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta}{\alpha R^2} = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{a}$$

adică centrul de greutate al sectorului de cerc se află ***pe bisectoarea unghiului la centru la o distanță*** $OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{a}$ ***de centrul cercului.***

Trei sectoare de cerc sunt mai des folosite în aplicațiile de mecanică și anume: cercul întreg, semicercul și sfertul de cerc. Dacă pentru cercul întreg centrul de greutate se află în centrul cercului, pentru semicerc și pentru sfertul de cerc, notând cu e excentricitatea centrului de greutate în raport cu diametrul sau raza sfertului de cerc , acesta rezultă:

$$e = R\frac{4}{3\pi}$$

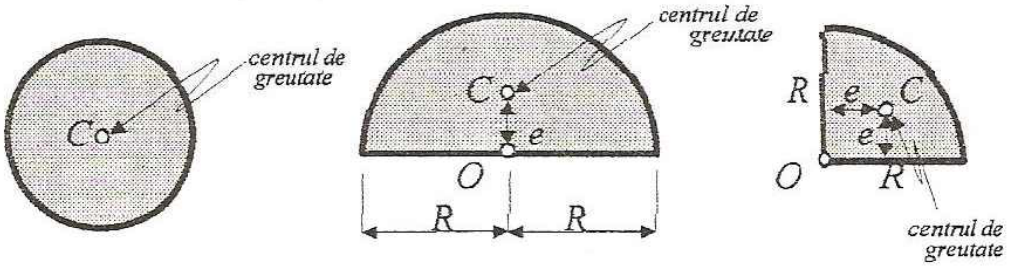


Fig.12.

3.7.Exemplificări.

Problema 1. *Să se determine poziția centrului de greutate pentru bara omogenă din figura 13.*

Rezolvare. Etapa 1. *Se observă faptul că bara omogenă poate fi considerată alcătuită din trei bare: un sfert de cerc, o bară rectilinie și un semicerc. Pentru fiecare din aceste trei bare cunoaștem atât lungimea cât și poziția centrului de greutate. Lungimile barelor sunt:*

$$l_1 = l_{AB} = \frac{\pi R_1}{4} = 0{,}5\pi a \; ; \; l_2 = l_{BC} = 4a \; ; \; l_3 = l_{CD} = \frac{\pi R_2}{2} = 1{,}5\pi a$$

Etapa 2. *Vom alege ca sistem de referință sistemul cu originea în centrul*

cercului din care face parte sfertul de cerc AB şi cu axele orizontala şi verticala.

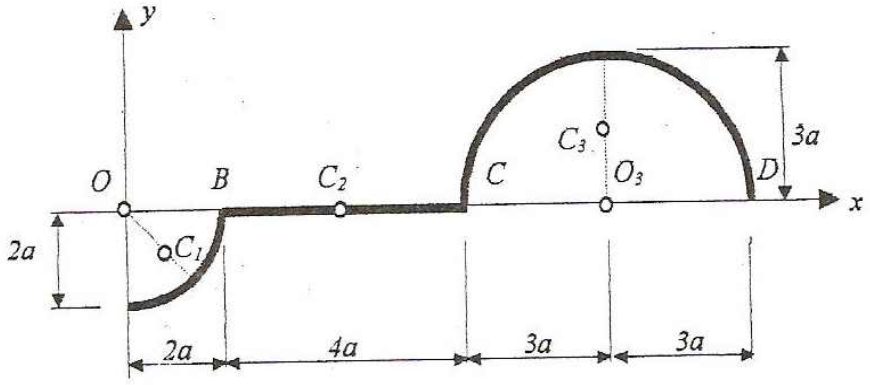


Fig.13.

Etapa 3. *Vom determina acum coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple în raport cu sistemul de referinţă ales. Folosind relaţiile găsite anterior vom obţine:*

$$OC_1 = R_1 \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = 2a\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}a;$$

$$x_1 = OC_1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi}a;\ y_1 = -OC_1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{4}{\pi}a;$$

$$x_2 = OB + \frac{BC}{2} = 4a\ ;\ y_2 = 0\ ;$$

$$O_3C_3 = R_3 \frac{\sin\alpha_3}{\alpha_3} = 3a\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{\pi}a;$$

$$x_3 = OB + BC + CO_3 = 9a\ ;\ O_3C_3 = \frac{6}{\pi}a;$$

Vom efectua calculul lungimii totale şi al momentelor statice într-un tabel:

Bara	l_i	x_i	y_i	$l_i \cdot x_i$	$l_i \cdot y_i$
AB	$0,5\pi a$	$4a/\pi$	$-4a/\pi$	$2a^2$	$-2a^2$
BC	$4a$	$4a$	0	$16a^2$	0
CD	$1,5\pi a$	$9a$	$6a/\pi$	$13,5\pi a^2$	$9a^2$
Σ	$10,28a$			$60,39a^2$	$7a^2$

iar coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma l_i} = \frac{60{,}39a^2}{10{,}28a} = 5{,}87a\ ;$$

$$y_G = \frac{\Sigma l_i y_i}{\Sigma l_i} = \frac{7a^2}{10{,}28a} = 0{,}68a.$$

Problema 2. *Să se determine poziția centrului de greutate pentru placa omogenă din figura 14.*

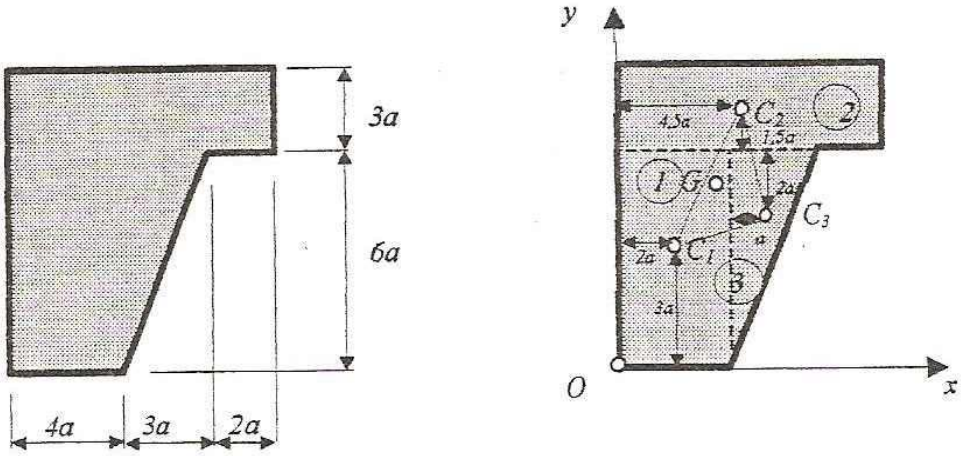


Fig.14.

Rezolvare. Etapa 1. *Vom împărți placa în plăci simple pentru care sunt cunoscute ariile și pozițiile centrelor de greutate. Așa cum arătam anterior împărțirea nu este unică dar vom alege varianta în care corpurile se adună pentru a obține placa dată, adică vom împărți în două dreptunghiuri și un triunghi. Ariile plăcilor simple vor fi:*

$$A_1 = 4a \cdot 6a = 24a^2\ ;\ A_2 = 9a \cdot 3a = 27a^2\ ;\ A_3 = \frac{3a.6a}{2} = 9a^2$$

Etapa 2. *Sistemul de referință îl vom alege astfel ca întreaga placă să se situeze în cadranul unu astfel că toate coordonatele centrelor de greutate vor rezulta pozitive.*

Etapa 3. *Pentru calculul acestor coordonate, după ce reprezentăm centrele vom calcula distanțele de la acestea la laturile dreptunghiurilor sau catetele triunghiului. În final determinăm coordonatele ca sumă (sau diferență) de distanțe de la centre la axe măsurând paralel cu axa corespunzătoare:*

$$x_1 = 2a\ ;\ y_1 = 3a\ ;\ x_2\ 4{,}5a\ ;\ y_2 = 6a + 1{,}5a = 7{,}5a\ ;\ x_3 = 4a + a = 5a\ ;$$
$$y_3 = 6a - 2a = 4a\ .$$

Putem observa că pentru triunghi coordonata y_3 se putea calcula și direct ca fiind 2/3 din înălțimea triunghiului măsurată de la vârf.

Etapa 4. *Vom efectua calculul momentelor statice și al ariei totale în tabelul următor:*

Fig	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$24a^2$	$2a$	$3a$	$48a^3$	$72a^3$
2	$27a^2$	$4,5a$	$7,5a$	$121,5a^3$	$202,5a^3$
3	$9a^2$	$5a$	$4a$	$45a^3$	$36a^3$
Σ	$60a^2$			$214,5a^3$	$310,5a^3$

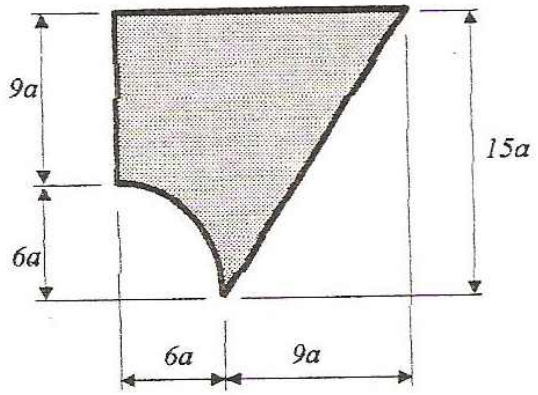
Etapa 5. *Coordonatele centrului de greutate se vor obține făcând raportul momentelor statice cu aria totală:*

$$x_G = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{214,5a^3}{60a^2} = 3,57a\,;$$

$$y_G = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{310,5a^3}{60a^2} = 5,175a$$

Etapa 6. *Dacă reprezentăm centrul de greutate al plăcii se observă că datorită faptului că palca este formată prin însumarea figurilor simple el va rezulta ca poziție în interiorul triunghiului având ca vârfuri centrele figurilor simple.*

Problema 3. *Să se determine poziția centrului de greutate pentru placa plană omogenă din figura 15.*



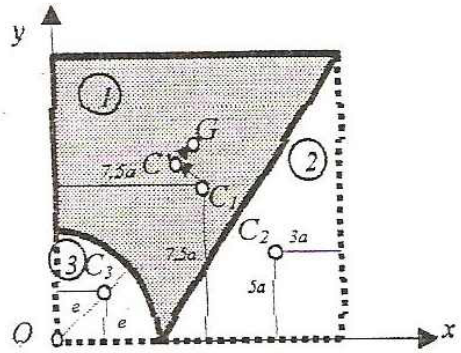


Fig.15.

Rezolvare. *Vom alege ca împărțire în figuri simple varianta în care dintr-un pătrat de latură 15a scădem un triunghi și un sfert de cerc cu centrul în O. Apoi alegem ca sistem de referință sistemul tangent la placă astfel ca întregul corp să se situeze în cadranul unu. Ariile celor trei plăci simple vor fi,(evident plăcile 2 și 3 se vor considera cu arie negativă):*

$$A_1 = 15a \cdot 15a = 225a^2\ ;\ A_2 = -\frac{1}{2} 9a \cdot 15a = -67,5a^2\ ;$$

$$A_3 = -\frac{\pi(6a)^2}{4} = -28{,}5a^2$$

Poziţiile centrelor figurilor simple le vom determina în raport cu laturile (pentru dreptunghi), în raport cu catetele (pentru triunghi) şi în raport cu razele (pentru sfertul de cerc):

$$e = \frac{4R_3}{3\pi} = \frac{4{,}6a}{3\pi} = 2{,}55a$$

cu care distanţe se obţin coordonatele centrelor figurilor simple şi alcătuim tabelul:

Fig.	A_i	X_i	Y_i	Ax_i	Ay_i
1	$225a^2$	$7{,}5a$	$7{,}5a$	$1687{,}5a^3$	$1687{,}5a^3$
2	$-67{,}5a^2$	$12a$	$5a$	$-810a^3$	$-337{,}5a^3$
3	$-28{,}5a^2$	$2{,}55a$	$2{,}55a$	$-72a^3$	$-72a^3$
Σ	$129a^2$			$805{,}5a^3$	$1278a^3$

Coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{805{,}5a^3}{129a^2} = 6{,}24a\ ;$$

$$y_G = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{1278a^3}{129a^2} = 9{,}9a$$

Centrul de greutate al pătratului se află în C_1. Prin scăderea triunghiului (un gol) centrul de greutate se va deplasa în C', iar apoi prin scăderea sfertului de cerc se deplasează în poziţia finală G.

Problema 4. *Să se determine poziţia centrului de greutate pentru placa omogenă din figura 16.*

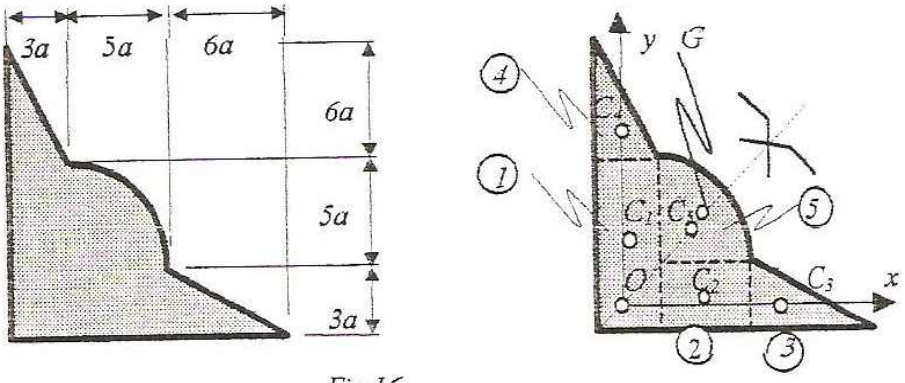


Fig.16.

Rezolvare. *Observăm că placa este simetrică având ac axă de simetrie bisectoarea unghiului de 90°. După împărțirea în cinci figuri simple (două dreptunghiuri, două triunghiuri dreptunghice și un sfert de cerc) alegem ca sistem de referință un sistem care trece prin centrele de greutate ale celor două triunghiuri și originea pe axa de simetrie. Acest sistem va face ca să avem:*

$$x_G = y_G$$

deci să calculăm o singură coordonată și de asemenea două coordonate ale figurilor simple vor fi nule. În consecință calculul va fi mai simplu de efectuat: Pe de altă parte datorită faptului că toate centrele figurilor simple se află în cadranul unu, toate celelalte coordonate vor fi pozitive.

Tabelul pentru calculul uneia din cele două coordonate va fi:

Fig	A_i	X_i	$A_i x_i$
1	$3a \cdot 8a = 24a^2$	$3a/2-a = 0,5a$	$12a^3$
2	$5a \cdot 3a = 15a^2$	$3a+5a/2-a = 4,5a$	$67,5a^3$
3	$6a \cdot 3a/2 = 9a^2$	$8a + 6a/3 - a = 9a$	$81a^3$
4	$9a^2$	$3a/3 - a = 0$	0
5	$\pi(5a)^2/4 = 19,62a^2$	$3a+4,5a/3\pi-a=4,12a$	$80,89a^3$
Σ	$76,62a^2$		$241,39a^3$

Obținem în final coordonata centrului de greutate:

$$x_G = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{241,39a^3}{76,62a^2} = 3,15a.$$

Problema 5. *Să se determine poziția centrului de greutate pentru bara omogenă din figura 17.*

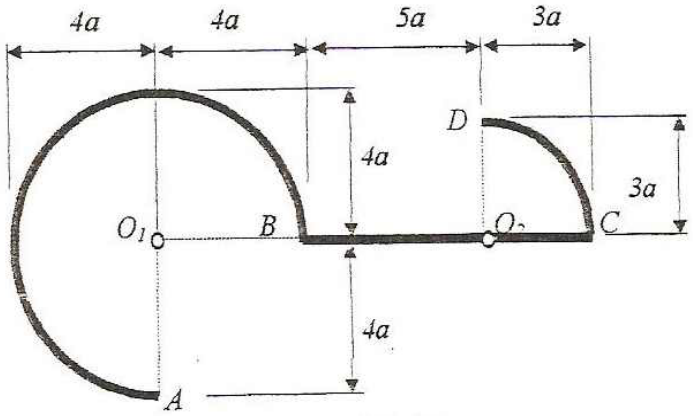


Fig.17.

Problema 6. *Pentru placa omogenă din figura 18 să se determine poziția centrului de greutate.*

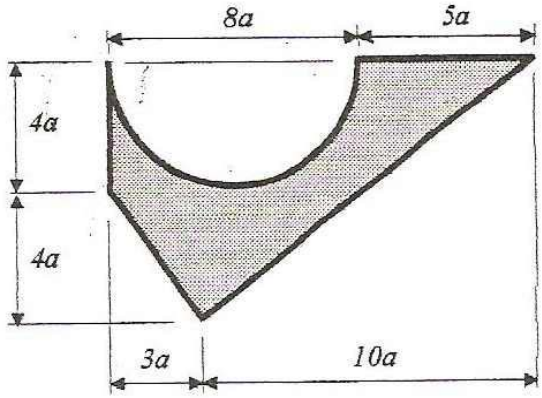


Fig.18.

Problema 7. *Să se determine poziția centrului de greutate pentru placa omogenă din figura 19.*

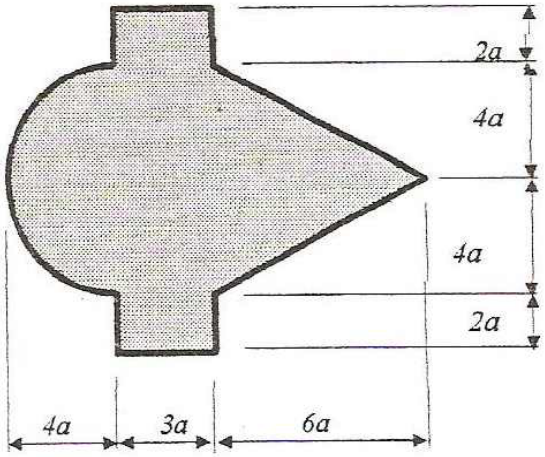


Fig.19.

3.8. Teoreme Pappus-Guldin.

Vom enunța și vom demonstra două teoreme referitoare la aria, respectiv la volumul corpurilor de rotație.

Teorema I. *Aria suprafeței obținută prin rotația unui segment de curbă plană în jurul unei axe aflate în planul curbei, dar pe care nu o traversează, este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și lungimea cercului descris de centrul de greutate al segmentului în jurul*

axei:

$$A = 2\pi . d_C . L$$

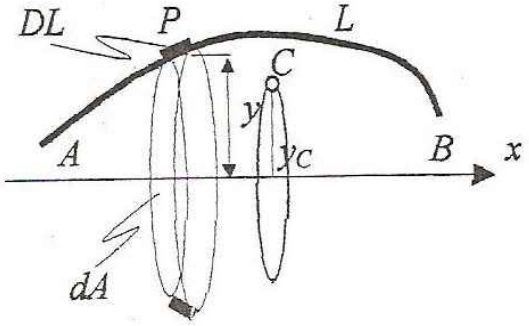


Fig.20.

Pentru demonstrație vom considera axa de rotație axa Ox și în punctul P oarecare de pe segmentul de curbă o lungime infinitezimală dl. Dacă rotim acest segment foarte mic, ce poate fi asimilat cu un segment de dreaptă, va rezulta o suprafață conică. Aria laterală a trunchiului de con este :

$$dA = 2\pi . y . dl$$

Însumând aceste arii elementare se obține aria suprafeței de rotație:

$$A = \int_A dA = 2\pi \int_L ydl = 2\pi . y_C . L$$

deoarece ultima integrală este momentul static al segmentului de curbă în raport cu axa Ox.

Teorema II. *Volumul corpului obținut prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei axa din planul suprafeței, dar pe care nu o traversează, este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței în jurul axei:*

$$V = 2\pi . d_C . A$$

Vom considera și de data aceasta axa Ox axa în jurul căreia se efectuează rotația suprafeței plane de arie A.

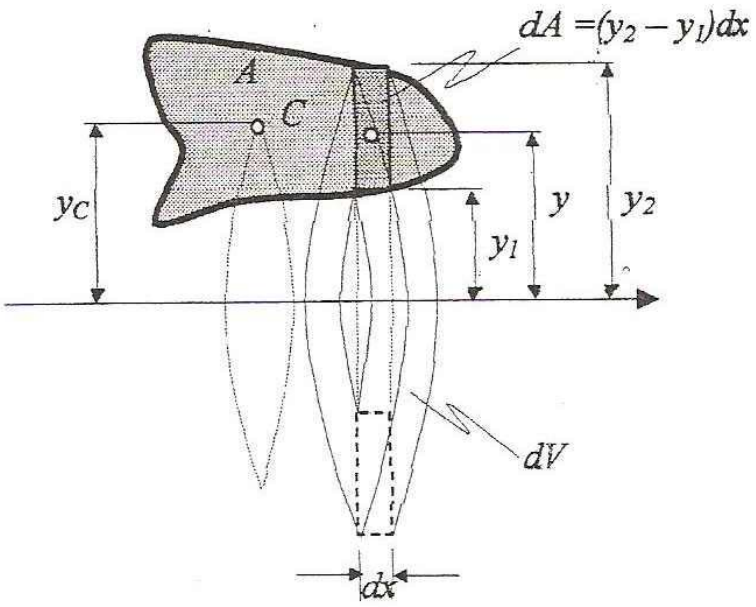


Fig.21.

Alegem elementul de arie dreptunghiular de lățime dx și înălțime $(y_2 - y_1)$. *Rotind acest element de arie în jurul axei se obține un element de volum de forma unui cilindru de rază* y_2 *și înălțime dx din care se scade un alt cilindru de aceeași înălțime și rază* y_1. *Vom avea volumul elementar:*

$$dV = \pi \cdot y_2^2 \cdot dx - \pi \cdot y_1^2 \cdot dx = \pi (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

element care se mai poate scrie și sub forma:

$$dV = 2\pi \frac{y_2+y_1}{2} (y_2 - y_1)\, dx = 2\pi y\, dA$$

deoarece semisuma celor două coordonate reprezintă coordonata centrului de greutate al elementului de arie dA. Însumând toate volumele elementare se obține în final volumul total:

$$V = \int_V dV = 2\pi \int_A y dA = 2\pi y_C\, dA$$

ultima integrală fiind momentul static al suprafeței în raport cu axa Ox.

Capitolul 4. Statica punctului material.

4.1.Introducere.

Punctul material prin definiție este un corp cu dimensiuni neglijabile sau un corp la care dimensiunile nu interesează în problema studiată. Dacă punctul material poate ocupa orice poziție în spațiu atunci el se numeşte ***punct material liber****. Dacă însă, datorită unor restricții de natură geometrică, punctul nu poate ocupa orice poziție în spațiu atunci el sa va numi* ***punct material cu legături.***

Să considerăm un punct material liber. Poziția lui poate fi exprimată în raport cu un anumit sistem de referință prin intermediul a trei coordonate scalare pe care le vom numi ***parametrii de poziție.*** *Dacă punctul este liber aceşti parametrii îşi pot modifica valorile independent de ceilalți şi se vor numi parametrii de poziție* ***independenți.***

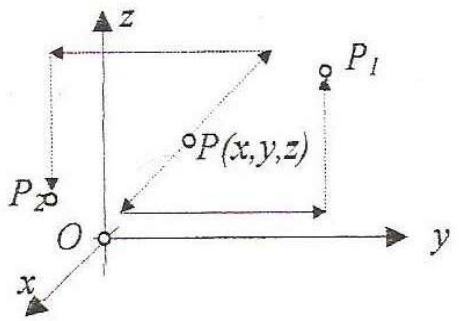


Fig.1

Pe de altă parte pentru schimbarea poziției punctului material din poziția P, oarecare, într-o altă poziție oarecare (de exemplu P_1 sau P_2) se pot efectua trei mişcări particulare independente. ***Posibilitățile***

independente de mişcare ale punctului material în vederea modificării poziţiei lui se numesc grade de libertate. *Observăm imediat că un punct material liber are trei grade de libertate în spaţiu , iar acest număr este egal cu numărul parametrilor de poziţie independenţi.*

$$N_{GL} = N_{PPI}$$

unde N_{GL} este numărul gradelor de libertate iar N_{PPI} este numărul parametrilor de poziţie independenţi.

În plan poziţia punctului este definită de doi parametrii şi se pot efectua două mişcări independente pentru schimbarea poziţiei, în consecinţă punctul material liber în plan are două grad de libertate.

Relaţia anterioară , dacă rămâne adevărată (şi aşa va fi) şi pentru punctul material cu legături, arată că pentru determinarea numărului gradelor de libertate vom avea două modalităţi: sau determinăm numărul de parametrii independenţi care definesc poziţia punctului sau determinăm numărul de posibilităţi independente de mişcare.

4.2.Echilibrul punctului material liber.

Vom presupune un punct material liber în repaus. Asupra punctului considerăm acţionând un sistem de forţe concurente. Problema care se pune este: în ce condiţii punctul aflat în repaus va rămâne în continuare în repaus sub acţiunea sistemului de forţe. Pentru că punctul este în repaus este evident faptul că sistemul de forţe trebuie să aibă efect nul asupra lui. Dar întrucât cel mai simplu sistem echivalent sistemului de forţe concurente este rezultanta se va obţine condiţia:

$$\bar{R} = 0$$

care este condiţia vectorială pentru ca punctul să rămână în repaus. În acelaşi timp, situaţia când un sistem are efect nul am numit-o ***echilibrul forţelor.*** *Deci pentru ca un punct material să rămână în* ***repaus*** *trebuie ca sistemul de forţe să fie în* ***echilibru.*** *Pentru uşurinţa exprimării vom spune că* ***punctul material este în echilibru.*** *Condiţiile scalare de echilibru ale punctului material liber vor fi:*

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; \Sigma Y_i = 0 \; ; \; \Sigma Z_i = 0 \; ;$$

În funcție de necunoscutele problemei deosebim trei tipuri de probleme. ***Problema directă*** *în care se cunosc toate forțele care acționează asupra punctului material și se cere determinarea poziției de echilibru. Întrucât poziția de echilibru este definită prin intermediul a trei parametrii , iar numărul de ecuații scalare de echilibru sunt tot trei, în general problema are soluție unică.*

Problema inversă *în care se cunoaște poziția de echilibru a punctului și se cere determinarea sistemului de forțe care dau acea poziție. În general această categorie de probleme are o infinitate de soluții.*

Problema mixtă *este problema în care se cunosc o parte din parametrii de poziție și o parte din forțele care acționează asupra punctului material și se cere determinarea celorlalte forțe și a parametrilor de poziție pentru echilibrul punctului.*

4.3. Exemplificări.

Problema 1. *Un inel P de greutate neglijabilă se leagă cu ajutorul unor resoarte ideale de trei puncte fixe situate în vârfurile unui triunghi dreptunghic ca în figura 2. Cunoscând faptul că lungimile inițiale ale resoartelor sunt neglijabile și coeficienții elastici sunt: $k_1 = k$, $K_2 = 2k$, $k_3 = 3k$ să se determine poziția de echilibru a punctului material P în planul triunghiului.*

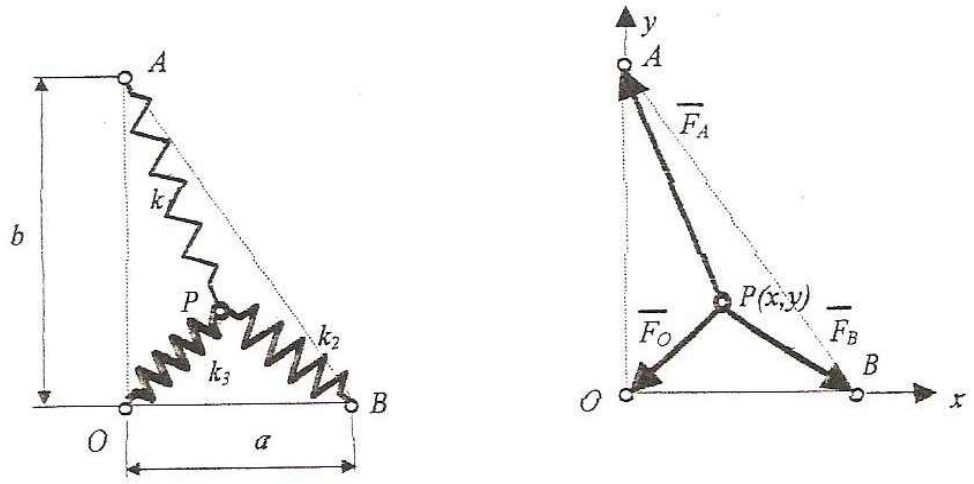


Fig.2.

Rezolvare. *Cele trei resoarte care vin în contact cu punctul material nu împiedică posibilitatea lui de a-și schimba poziția, în consecință avem de-a face cu un punct material liber. De altfel dacă alegem un sistem de referință xOy, poziția punctului se va defini cu ajutorul a două coordonate care pot avea orice valoare independent una de cealaltă. Cele trei resoarte nu impun restricții în posibilitatea de modificare a poziției. Acestea reprezintă corpuri*

ce transmit punctului material forțe. Pentru determinarea acestor forțe vom ține seama de faptul că acestea vor fi numai de tensiune (trag de punctul material) datorită faptului că lungimile lor inițiale sunt neglijabile , deci toate resoartele sunt întinse. În concluzie forțele vor avea direcțiile de la punctul P la cele trei puncte O, A și B și cu sensurile spre aceste trei puncte. Mărimile acestor forțe sunt proporționale cu alungirile resoartelor adică chiar cu distanțele de la P la cele trei puncte și în consecință expresiile celor trei forțe vor fi:

$$\overline{F_A} = k_1 \cdot \overline{PA} \; ; \; \overline{F_B} = k_2 \cdot \overline{PB} \; ; \; \overline{F_O} = k_3 \cdot \overline{PO}$$

Ecuațiile de echilibru ale punctului material P se exprimă scalar efectuând proiecțiile pe axe ale forțelor. La calculul proiecțiilor vom avea în vedere faptul că proiectăm în fond vectorii de poziție ale celor trei puncte în raport cu punctul P. Vom găsi:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; -F_{Ax} + F_{Bx} - F_{Ox} = 0 \; ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; F_{Ay} - F_{By} - F_{Oy} = 0 \; ;$$

sau :

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; -kx + 2k(a-x) - 2kx = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; k(b-y) - 2ky - 3ky = 0.$$

Rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute se obțin coordonatele:

$$x = \frac{a}{3} \; ; \; y = \frac{b}{6}$$

reprezentând poziția de echilibru a punctului.

Problema 2. *Un punct material M de greutate G se suspendă prin intermediul a două fire ideale, care se petrec peste doi scripeți punctuali fără frecare, de alte două greutăți P și Q, ca în figura 3. Cunoscând pozițiile celor doi scripeți punctuali și faptul că se realizează echilibrul punctului material M în plan vertical să se determine poziția de echilibru a punctului.*

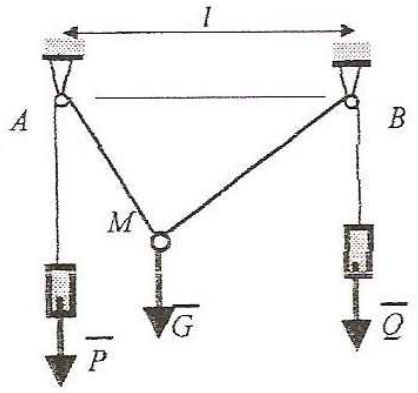


Fig.3.

4.4.Legături. Axioma legăturilor.

Prin definiție ***orice restricție impusă punctului în posibilitatea de a-și modifica poziția*** *se numește* ***legătură.*** *De exemplu dacă un punct material se leagă de un punct fix cu un fir ideal (nu se rupe , nu se întinde și nu opune rezistență la îndoire) de lungime l, atunci acest punct nu poate ieși în afara sferei cu centrul în punctul fix și de rază l.*

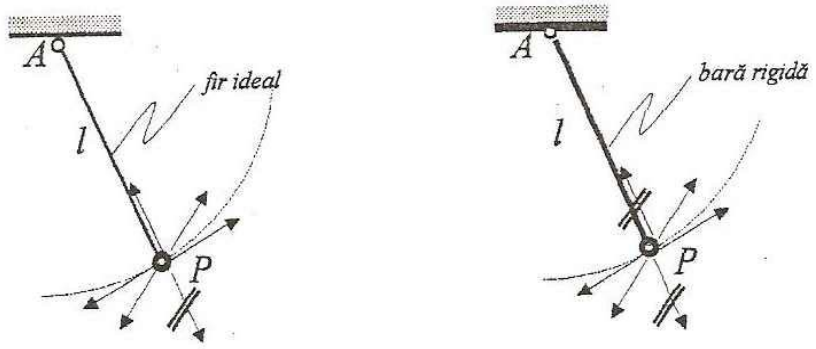


Fig.4.

Dacă firul este înlocuit cu o bară rigidă care poate efectua rotații în jurul capătului de suspendare, atunci punctul este obligat să se găsească pe sfera cu centrul în punctul fix și de rază l. Se poate observa că atât în primul exemplu cât și în cel de al doilea, punctului i se suprimă posibilități de deplasare, de mișcare. Astfel , în primul caz, legarea cu fir, punctului material i se suprimă posibilitatea de deplasare pe direcția firului numai spre exteriorul sferei, pe când în cazul legării cu bara rigidă punctului i se suprimă posibilitatea de deplasarea de-a lungul barei în ambele sensuri. Punctul va păstra posibilitățile de deplasare în plan tangent la sferă (perpendicular pe fir sau bară) pe două direcții în ambele sensuri.

Constatăm deci că ***legăturile suprimă grade de libertate*** *punctului material. Mai observăm că legăturile pot suprima deplasarea într-un singur sens pe o direcție sau în ambele sensuri. Astfel vom avea* ***legături unilatere*** *dacă legătura suprimă deplasarea într-un singur sens și* ***legături bilatere*** *dacă se suprimă deplasările în ambele sensuri pe o direcție.*

Dacă vom considera un sistem de referință cartezian cu originea în punctul fix, atunci coordonatele punctului trebuie să respecte relațiile:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$$

în cazul legări cu fir şi :

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

în cazul legări cu bară. În consecinţă o legătură unilateră se va exprima printr.o inegalitate iar o legătură bilateră printr-o egalitate:

$f(x,y,z) \leq 0$ *legătură unilateră*
$f(x,y,z) = 0$ *legătură bilateră*

ultima relaţie reprezentând ecuaţia unei suprafeţe. Relaţiile precedente fiind exprimate între parametrii de poziţie ai punctului material rezultă că legăturile scad numărul de parametrii de poziţie independenţi astfel că relaţia de egalitate dintre numărul gradelor de libertate şi numărul parametrilor de poziţie independenţi va rămâne adevărată şi în cazul punctului material cu legături.

Să mai prezentăm un exemplu şi anume să presupunem că un inel de dimensiuni foarte mici se află pe un cadru circular în planul vertical. Este uşor de observat că de data aceasta se suprimă posibilitatea de deplasare a punctului atât pe direcţia razei cadrului circular cât şi pe direcţie perpendiculară pe planul cadrului rămânând posibilă numai mişcarea pe direcţia tangentei la cadru.

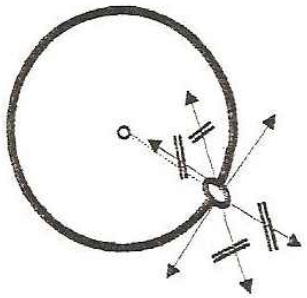


Fig.5.

Rezultă din aceste exemple că există legături care suprimă unul singur sau mai multe grade de libertate. Legăturile care suprimă un singur grad de libertate se numesc ***legături simple*** *iar cele care suprimă mai multe se numesc* ***legături multiple.***

Dacă observăm că o legătură simplă se exprimă printr-o singură relație între parametrii de poziție, iar o legătură multiplă prin mai multe astfel de relații atunci legăturile multiple pot fi considerate ca o combinație a unor legături simple și deci este suficient în continuare să ne referim la legăturile simple.

Să considerăm din nou legătura realizată prin intermediul cadrului circular. Să presupunem că inelul are greutatea G.

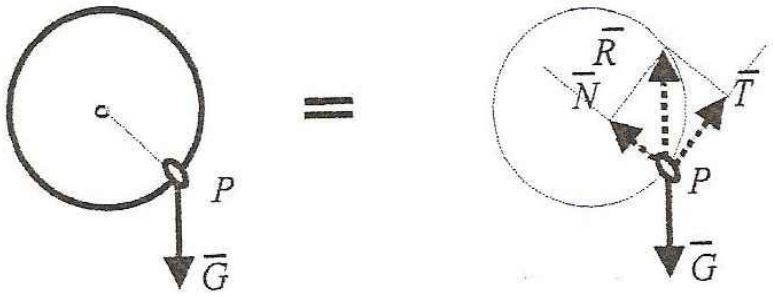


Fig.6.

Dacă așezăm inelul într-o poziție apropiată de cea mai joasă poziție de pe cadru se constată că putem găsi poziții în care punctul material rămâne în repaus. Dar punctul este acționat numai de greutatea G, deci ar trebui, conform principiului acțiunii forței să se miște pe verticală cu o accelerație proporțională cu greutatea G. Întrucât punctul se află în repaus înseamnă că acțiunea greutății este anulată de o forță care provine din efectul cadrului asupra punctului material. În consecință dacă îndepărtăm cadrul circular poziția de repaus poate fi obținută de acțiunea greutății și a unei forțe R care are aceeași direcție și mărime dar de sens opus greutății G. Îndepărtând legătura punctului material , acesta poate fi considerat liber și în baza experienței putem enunța ***axioma legăturilor*** *(sau* ***axioma eliberări)*** *care statuează:* ***orice legătură poate fi înlocuită cu o forță numită forță de legătură (sau reacțiune) și care să nu modifice starea mecanică a punctului material.*** *Dacă descompunem reacțiunea RR în două componente : una pe direcția normalei la planul tangent în punctul de legătură și una în planul tangent, atunci vom putea scrie:*

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T}$$

unde $\overline{N}$ *se numește* ***reacțiune normală*** *și* $\overline{T}$ *se numește* ***forță de frecare.***

În funcție de existența sau inexistența componentei T avem de-a face cu două tipuri de legături: ***legături ideale (sau legături fără frecare)*** *la care :*

$$\overline{T} = 0 \qquad \overline{R} = \overline{N}$$

adică forța de legătură este reacțiunea normală și: ***legături reale (sau legături cu frecare)*** *atunci când legătura comportă și forța de frecare.*

4.5.Echilibrul punctului material cu legături ideale.

Să presupunem că un punct material este acționat de un sistem de forțe concurente și are și unele legături ideale. Căutăm condițiile în care punctul aflat în repaus sub acțiunea forțelor și al legăturilor rămâne în continuare în repaus. Pentru determinarea acestor condiții, în primă fază, în baza axiomei legăturilor vom înlocui legăturile ideale simple cu reacțiunile corespunzătoare. O astfel de reacțiune va avea următoarele caracteristici:

- *Mărimea este necunoscută, ea determinându-se din condiția ca starea mecanică a punctului să rămână nemodificată. Aici această condiție este cea de echilibru (sau de repaus);*
- *Direcția reacțiunii este normală pe planul tangent la suprafața reprezentând legătura. Această direcție este cea a deplasării suprimate de legătura simplă, în consecință direcția reacțiunii este cunoscută;*
- *Pentru legăturile unilatere sensul reacțiunii este cel invers sensului deplasării suprimate , iar la legăturile bilatere sensul este necunoscut. Totuși acest sens nu este o necunoscută independentă deoarece pe o direcție nu pot exista decât două sensuri, iar pentru determinarea sensului reacțiunii se va proceda la alegerea unui sens (la întâmplare), semnul rezultatului confirmând (semnul +) sau infirmând (semnul -) sensul ales;*
- *Punctul de aplicație este punctul material.*

Se poate observa că o legătură simplă suprimă un singur grad de libertate și introduce în calcul o singură necunoscută scalară, este vorba de mărimea reacțiunii . Pentru că o legătură simplă elimină un

parametru de poziție independent, în fapt o legătură va avea rolul de a schimba natura necunoscutelor problemei și anume din parametrii de poziție în forțe de legătură, punctul material devine un punct material liber acționat de două sisteme de forțe: un sistem de forțe date (forțe active, încărcări) și altul al forțelor de legătură (reacțiuni, forțe pasive). Pentru ca acest punct material să fie în echilibru trebuie să îndeplinească condiția:

$$\overline{R}_d + \overline{R}_l = 0$$

unde am notat $\overline{R}_d$ rezultanta forțelor date, iar $\overline{R}_l$ rezultanta forțelor de legătură. Condițiile scalare de echilibru se vor scrie:

$$\Sigma X_{di} + \Sigma X_{lj} = 0;$$
$$\Sigma Y_{di} + \Sigma Y_{lj} = 0;$$
$$\Sigma Z_{di} + \Sigma Z_{lj} = 0;$$

Se observă că dacă nu facem nici o diferențiere între forțele date și cele de legătură atunci condițiile de echilibru sunt identice cu cele de la punctul material liber.

Dacă legăturile sunt cunoscute ca ecuații ale suprafețelor respective atunci expresiile reacțiunilor normale se pot exprima cu ajutorul noțiunii de gradient care de exemplu în coordonate carteziene va da relația:

$$\overline{N}_j = \lambda_j \cdot grad f_j = \lambda_j \cdot \left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f_j}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f_j}{\partial z}\overline{k}\right)$$

Cu această relație condițiile de echilibru ale punctului material cu legături ideale mai pot fi scrise:

$$\Sigma X_{di} + \Sigma \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} = 0;$$
$$\Sigma Y_{di} + \Sigma \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y} = 0;$$
$$\Sigma Z_{di} + \Sigma \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial z} = 0;$$

Ca și în cazul punctului material liber, și în acest caz

vom întâlni cele trei tipuri de probleme în funcţie de natura necunoscutelor: problema directă, problema inversă şi problema mixtă.

4.6. Exemplificări.

Problema 3. *O macara simplă este reprezentată ca în figura 7. Să se calculeze forţele ce iau naştere în cele două bare MA şi MB care leagă scripetele punctual M de peretele vertical. Se cunoaşte faptul că scripetele este fără frecare iar firul ideal are la un capăt greutatea G care trebuie ridicată iar la celălalt capăt se înfăşoară pe tamburul unui motor.*

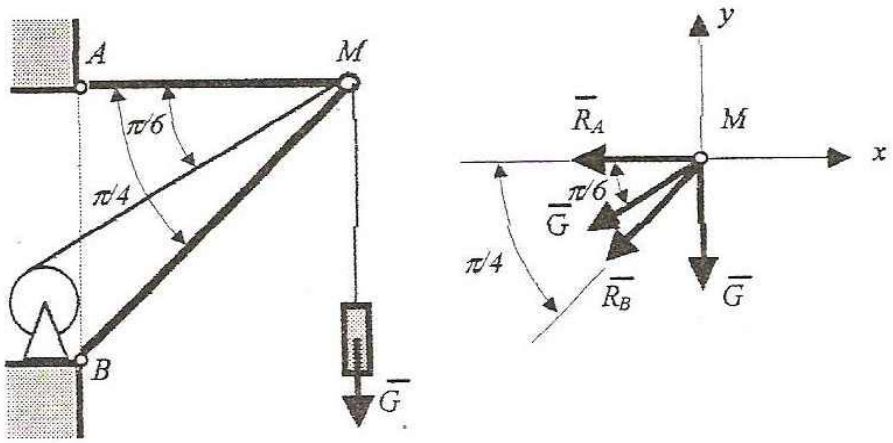


Fig.7.

Rezolvare. *Scripetele punctual se va considera punctul material al problemei deoarece toate forţele (din fir şi din bare) se for aplica acestui punct. Deoarece punctul nu poate ocupa orice poziţie în spaţiu avem de-a face cu un punct material cu legături. Întrucât punctul material vine în contact cu mai multe corpuri (două bare şi firul ideal) se pune întrebarea dacă toate corpurile reprezintă legături. Pentru a afla care din corpuri este legătură sau nu, se va proceda în modul următor: se consideră toate corpurile îndepărtate , mai puţin unul, şi se verifică dacă acel corp împiedică posibilitatea de a-i modifica poziţia punctului. Apoi se repetă operaţia cu un alt corp.*

Dacă se îndepărtează toate corpurile şi păstrăm numai bara AM se constată că aceasta este legătură deoarece punctul material nu poate fi mişcat pe direcţia barei. La fel se întâmplă şi cu bara BM. Dacă însă îndepărtăm barele şi rămâne numai firul, se observă că aceasta nu se opune posibilităţii de schimbare a poziţiei , deci firul nu este legătură ci doar un corp care transmite punctului material forţe. Aceste forţe sunt tensiuni şi sunt egale ca mărime cu forţe exercitată la capete.

Suprimând legăturile şi înlocuindu-le cu reacţiuni (aici sensurile au fost alese arbitrar deoarece cele două bare sunt legături bilatere) pe direcţiile celor două bare şi înlocuind firul cu două tensiuni pe direcţia firului având mărimile G , se obţine un punct material liber acţionat de un sistem de forţe concurente dintre care unele sunt necunoscute (reacţiunile) iar altele cunoscute (forţele date). Schema obţinută se numeşte ***schema statică de forţe.***

Vom exprima echilibrul acestui punct cu ajutorul a două ecuaţii de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ -R_A - G\frac{\sqrt{3}}{2} - R_B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ -G - G\frac{1}{2} - R_B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

Rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute se obțin reacțiunile:

$$R_A = 0{,}635\,G\ ;\ R_B = -2{,}12\,G.$$

Semnul reacțiunii $\overline{R_B}$ arată că această reacțiune de fapt are sens invers decât am considerat noi în rezolvarea problemei, pe când reacțiunea R_A a fost aleasă cu sensul corect.

Problema 4. *O bară AM având posibilitatea de a se roti în jurul extremității A, se menține în poziție verticală sub acțiunea unei forțe orizontale F = 100 daN ce acționează în punctul M datorită unui cablu ce se ancorează în punctul B și M. Cunoscând lungimea barei și poziția punctului B să se determine forțele care iau naștere în bară și cablu.*

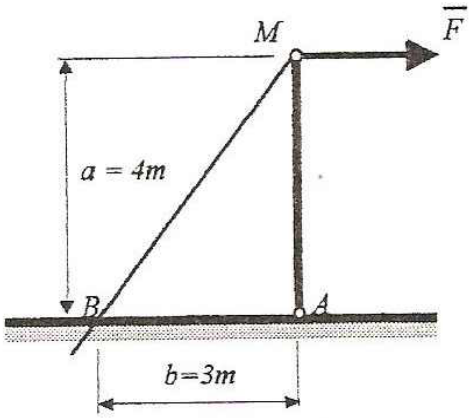


Fig.8.

4.7. Legile frecării de alunecare. Echilibrul punctului material cu legături cu frecare.

În secțiunea precedentă am exprimat echilibrul punctului material având legături ideale, dar în general , legăturile sunt reale adică introduc și frecări. Vom relua exemplul cu inelul care se află pe cadrul circular vertical. Am văzut că în diferite poziții ale inelului, aflate în vecinătatea punctului cel mai de jos, inelul acționat de greutatea proprie își poate găsi poziții de echilibru. Însă dacă aceste poziții se caută pe cerc în poziții din ce în ce mai sus , la un moment dat , punctul nu mai rămâne în

repaus ci va coborî şi îşi va găsi poziţia de echilibru într-o poziţie inferioară. Pe de altă parte cu cât ne deplasăm pe cerc în sus cu atât componenta $\overline{T}$ a reacţiunii va fi mai mare. Acest lucru înseamnă că în anumite condiţii componenta $\overline{T}$, forţa de frecare nu poate depăşi ca valoare o anumită limită. Vom nota această valoare T_{max}. Valoarea aceasta se determină experimental şi se supune unor legi care sunt cunoscute sub denumirea de ***legile frecării de alunecare sau legile lui Coulomb****. Aceste legi se enunţă în modul următor:*

- *1)**Mărimea forţei de frecare maximă nu depinde de mărimile suprafeţelor în contact**. Această lege face ca în continuare relaţiile găsite să se aplice în acelaşi mod şi solidului rigid care poate avea contact cu suprafaţa de spijin pe o anumită arie;*
- *2)**Mărimea forţei de frecare maximă este proporţională cu apăsarea normală pe suprafaţa de contact**;*
- *3)**Mărimea forţei de frecare maximă depinde de natura suprafeţelor în contact şi de natura prelucrării lor**.*

Aceste trei legi sunt cuprinse într-o relaţie:

$$T_{max} = \mu . N$$

unde μ se numeşte ***coeficient de frecare la alunecare****, este o mărime adimensională şi se determină experimental.*

Din cele prezentate rezultă că forţa de frecare are următoarele caracteristici:

- *Mărimea este necunoscută dar limitată de valoarea T_{max};*
- *Direcţia este în planul tangent la suprafaţa de rezemare;*
- *Sensul este invers sensului de mişcare a punctului material sau invers tendinţei de mişcare;*
- *Punctul de aplicaţie este punctul material.*

Să presupunem acum un punct material acţionat de un sistem de forţe şi având o serie de legături cu frecare. Se pune problema determinării condiţiilor în care punctul aflat în repaus va rămâne în repaus şi sub acţiunea forţelor şi a legăturilor. Pentru aceasta vom înlocui legăturile, în baza axiomei legăturilor, cu reacţiunile corespunzătoare (componentele normale şi forţele de frecare), obţinând un punct material liber acţionat de forţele date şi forţele de legătură. Condiţiile scalare de

echilibru pentru acest punct material liber vor fi aceleaşi ca cele de la punctul material cu legături ideale la care se adaugă condiţiile ca mărimile forţelor de frecare să nu depăşească valorile maxime corespunzătoare, adică:

$$\Sigma X_{di} + \Sigma X_{lj} = 0;$$
$$\Sigma Y_{di} + \Sigma Y_{lj} = 0;$$
$$\Sigma Z_{di} + \Sigma Z_{lj} = 0;$$
$$T_k \leq \mu_k \cdot N_k \quad (k = 1,2)$$

Condiţia $k = 1,2$ este necesară pentru a exprima echilibrul cu frecare deoarece dacă $k = 0$ nu avem legături cu frecare iar dacă $k = 3$ atunci având trei legături simple se suprimă toate gradele de libertate ale punctului şi în consecinţă nu există tendinţă de mişcare, deci forţele de frecare nu sunt activate iar legăturile se comportă ca şi când ar fi ideale. În ambele situaţii echilibrul se exprimă fie pentru un punct material liber fie pentru un punct material cu legături ideale.

Să considerăm acum situaţie limită de echilibru, adică situaţia când forţe de frecare are valoare maximă. Notăm cu φ_o unghiul format de direcţiile reacţiunii legăturii reale şi al reacţiunii legăturii ideale. Acest unghi se numeşte ***unghi de frecare maximă****. Tangenta unghiului se poate exprima din unul din triunghiurile dreptunghice formate:*

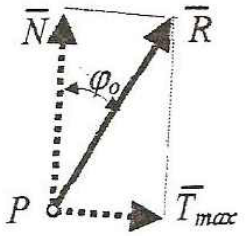


Fig.9.

$$tg\ \varphi_o = \frac{T_{max}}{N}$$

Din relaţia care defineşte valoarea forţei de frecare maximă rezultă egalitatea:

$$tg\ \varphi_o = \mu$$

Această relație va permite determinarea experimentală a coeficientului de frecare la alunecare.

4.8.Exemplificări.

Problema 5. *Să se determine poziția de echilibru, pe o suprafață aspră orizontală (coeficient de frecare la alunecare μ), a punctului material P de greutate G, punct legat de greutatea Q, cu un fir ideal ce trece peste un scripete punctual fără frecare. Se cunosc $G = 100$ daN, $Q = 20$ daN, $\mu = 0{,}1$ și poziția scripetelui A.*

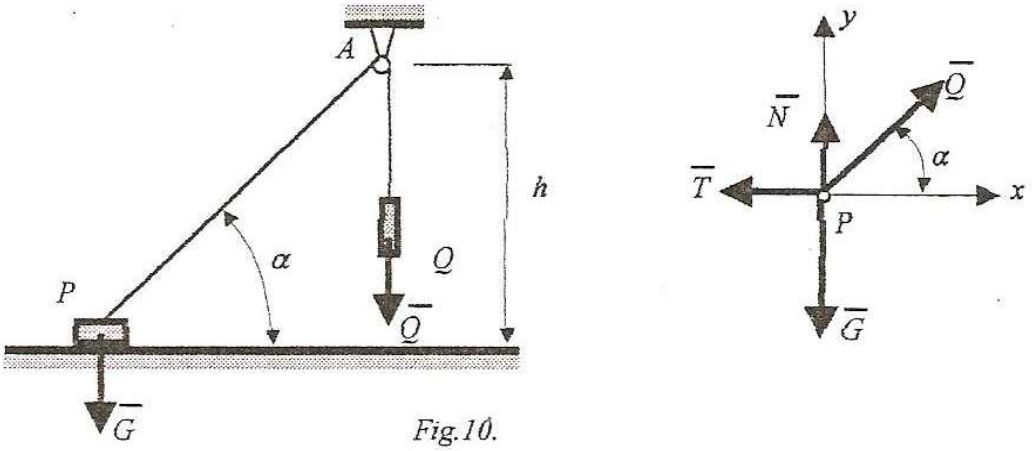


Fig.10.

Rezolvare. *Punctul material are o legătură cu frecare și anume planul orizontal aspru, deoarece firul nu reprezintă legătură. Având a singură legătură simplă punctul material rămâne cu un singur grad de libertate, deci are posibilitate de mișcare și anume alunecarea pe suprafața orizontală. Datorită forței $\overline{Q}$ punctul material are tendința de a se deplasa spre dreapta.*

Realizăm schema statică de forțe prin înlocuirea suprafeței aspre orizontale cu două componente de reacțiune: una normală cu sensul în sus, și o forță de frecare cu sensul spre stânga (invers tendinței de mișcare a punctului material). Firul se înlocuiește cu o forță de tensiune egală ca mărime cu forța din capătul firului, adică greutatea $\overline{Q}$ și având direcția firului.

Fiind un punct material cu un grad de libertate, un singur parametru de poziție va defini complet poziția lui în plan. Întrucât se cunoaște poziția scripetelui punctual, vom alege ca parametru de poziție unghiul format de fir cu orizontala (unghiul α).

Condițiile scalare de echilibru vor fi:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; -T + Q\cos\alpha = 0 \; ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; N + Q\sin\alpha - G = 0 \; ;$$
$$T \leq \mu N$$

Din primele două ecuații scoatem:

$$T = Q\cos\alpha \; ; \; N = G - Q\sin\alpha$$

care înlocuite în inegalitate vor da:

$$Q\cos\alpha \leq \mu\,(G - Q\sin\alpha)$$

sau:

$$Q\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \leq \mu G$$

Se poate însă scrie:

$$\mu = tg\,\varphi_o = 0{,}1 \longrightarrow \varphi_o = arctg\,\mu = 5^o\,50'$$

Înlocuind coeficientul de frecare cu tangenta unghiului de frecare, inegalitatea anterioară mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$\frac{Q}{\cos\varphi_o}(\cos\alpha\,.\,\cos\varphi_o + \sin\alpha\,.\,\sin\varphi_o) \leq tg\varphi_o\,.\,G$$

sau:

$$\cos(\alpha - \varphi_o) \leq \frac{G}{Q}\sin\varphi_o$$

Rezolvând inegalitatea vom găsi:

$$\alpha \geq \arccos(\frac{G}{Q}\sin\varphi_o) + \varphi_o = 59^o30' + 5^o50' = 65^o20'$$

adică punctul material îşi găseşte poziţia de echilibru dacă unghiul format de firul PA face cu orizontala un unghi mai mare decât 65°20', deci cu cât se apropie de verticala punctului A.

Problema 6. *Să se determine poziţiile de echilibru ale punctului P de greutate G = 10 daN ce se află pe o suprafaţă aspră cilindrică de rază R = 1,00m şi coeficient de frecare la alunecare μ = 0,05.*

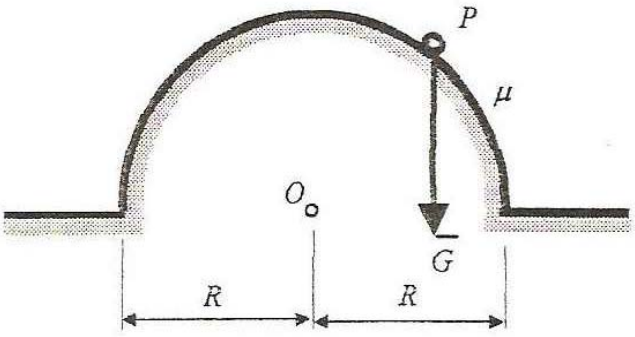


Fig.11.

Capitolul 5. Statica solidului rigid.

5.1.Introducere.

Solidul rigid este ***corpul nedeformabil****, adică corpul la care distanța dintre oricare două puncte nu se modifică indiferent de acțiunile exercitate asupra lui.*

Dacă corpul poate ocupa orice poziție în spațiu se spune că avem de-a face cu un ***solid rigid liber****. Pe când corpul care , datorită restricțiilor impuse punctelor lui, nu poate ocupa orice poziție în spațiu se numește* ***solid rigid cu legături****.*

Pentru a defini poziția unui corp liber în spațiu, în raport cu un sistem de referință, vom proceda în modul următor: mai întâi vom defini poziția unui punct A în raport cu reperul considerat (în fapt fixăm punctul). Se constată că dacă se definește poziția unui singur punct din corp, copul nu este definit ca poziție deoarece poate efectua rotații în jurul acestui punct fără a modifica parametrii de poziție ai acestui punct. Vom mai defini poziția unui al doilea punct B aflat la o distanță l_1, cunoscută în raport cu precedentul punct A, prin coordonatele sale în raport cu reperul considerat.

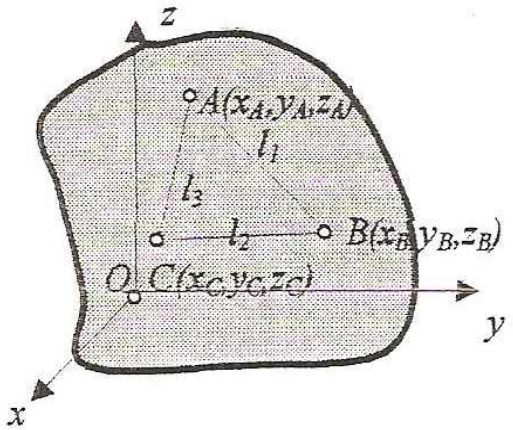


Fig.1.

Constatăm că nici de data aceasta poziția solidului rigid nu este definită (unică) deoarece corpul dacă are două puncte fixe poate să efectueze rotații în jurul dreptei care trece prin ele. În consecință vom mai considera definită (fixată) poziția unui al treilea punct prin intermediul coordonatelor și a distanțelor în raport cu celelalte două puncte fixate. De data aceasta corpul este complet definit ca poziție în spațiu și putem spune că poziția unui corp poate fi definită prin intermediul a nouă parametrii de poziție (cele nouă coordonate ale celor trei puncte).

Dar între cele două coordonate și cele trei distanțe cunoscute se pot scrie trei relații:

$$l_1^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 ;$$
$$l_2^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 ;$$
$$l_3^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 .$$

rezultând proprietatea că ***poziția unui corp este definită prin intermediul a șase parametrii independenți.***

Să presupunem un corp (de o formă definită pentru a urmări mai ușor modul în care se mișcă) într-o poziție oarecare în raport cu un sistem de referință. Pentru schimbarea poziției corpului (dintr-o

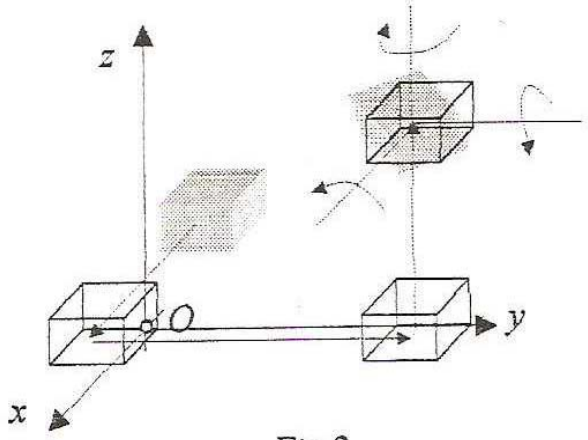


Fig.2.

poziție oarecare într-o altă poziție oarecare) există șase posibilități independente de mișcare și anume trei translații paralele cu cele trei axe ale sistemului de referință și trei rotații în raport cu trei direcții paralele cu cele trei axe. Cum posibilitățile independente de mișcare pentru schimbarea poziției au fost definite ca ***grade de libertate****, se obține că* ***un corp liber în spațiu are șase grade de libertate.***

O constatare pe care am făcut-o şi în cazul punctului material rămâne adevărată şi în cazul solidului rigid liber şi anume:

$$N_{PPI} = N_{GL}$$

adică numărul parametrilor de poziţie independenţi este egal cu numărul de grade de libertate.

Să considerăm acum problema plană (în două dimensiuni) a solidului rigid. Se observă că poziţia corpului este complet definită prin definirea poziţiilor a două puncte oarecare din corp. Dacă se cunosc poziţiile reciproce ale celor două puncte relaţia dintre coordonate şi distanţă:

$$l^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

face ca să putem spune: ***poziţia unui corp în plan este definită cu ajutorul a trei parametrii de poziţie independenţi.***

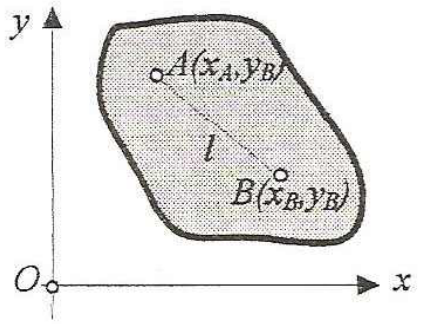


Fig.3.

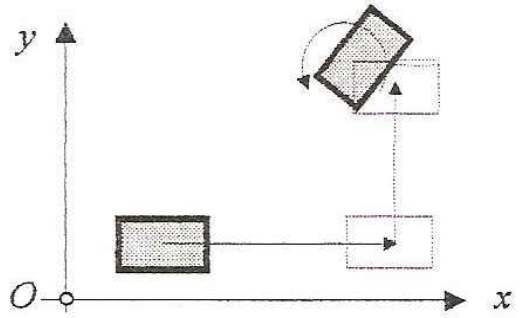


Fig.4.

Dacă dorim să schimbăm poziţia corpului, atunci avem posibilitatea de a efectua trei mişcări independente: două translaţii paralele cu axele sistemului şi o rotaţie în raport cu un punct oarecare din corp. Vom spune deci că: ***în plan un corp liber are trei grade de libertate.***

5.2.Echilibrul solidului rigid liber.

Presupunem un corp liber aflat în repaus. Vrem să găsim condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească un sistem de forţe pentru ca rigidul să rămână în continuare în repaus. Acest lucru se poate obţine dacă

sistemul de forțe are efect nul asupra corpului. Am văzut la sistemele de forțe că pentru ca un sistem de forțe să nu aibă efect asupra unui corp trebuie ca sistemul să fie în ***echilibru.*** *Vom spune în acest caz că și* ***solidul rigid este în echilibru.*** *Condițiile vectoriale de echilibru sunt:*

$$\bar{R} = 0 \; ; \; \bar{M}_O = 0$$

sau :

$$\Sigma \bar{F}_i = 0 \; ; \; \Sigma \bar{M}_{Oi} = 0$$

Condițiile scalare de echilibru se obțin proiectând pe axe ultimele două condiții vectoriale:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; \Sigma Y_i = 0 \; ; \; \Sigma Z_i = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{xi} = 0 \; ; \; \Sigma M_{yi} = 0 \; ; \; \Sigma M_{zi} = 0 \; .$$

În problema plană, adică atunci când corpul este acționat de un sistem de forțe coplanare, aceste condiții vor fi:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; \Sigma Y_i = 0 \; ; \; \Sigma M_{Oi} = 0$$

adică vom folosi două ecuații de forță și o singură ecuație de moment. În fapt aceste condiții exprimă condiția ca forțele care acționează asupra rigidului să nu producă translații pe orizontală și pe verticală și nici rotații în raport cu un punct oarecare.

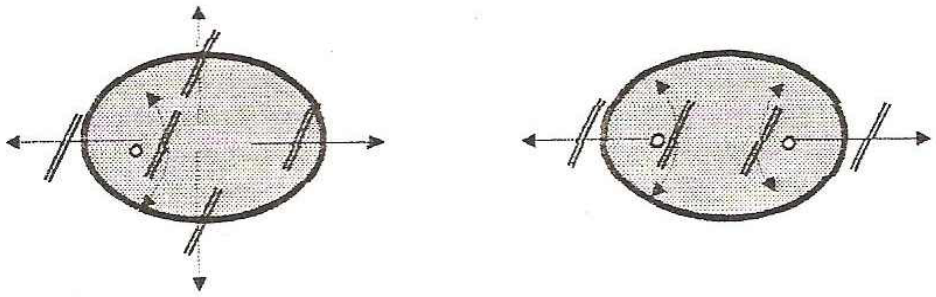


Fig.5.

Însă același efect poate fi exprimat și dacă corpul nu efectuează translație pe orizontală și nici rotații în raport cu două puncte aflate pe aceeași orizontală. Putem observa în acest caz că dacă un corp nu efectuează rotații în raport cu două puncte atunci nu poate efectua nici

translații pe direcție perpendiculară pe dreapta ce unește acele două puncte (aici pe verticală). Rezultă din această constatare că de fapt echilibrul corpului se poate exprima și cu ajutorul unei singure ecuații de forță și două ecuații de moment în raport cu două puncte:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; \Sigma M_{Ai} = 0 \; ; \; \Sigma M_{Oi} = 0$$

Această proprietate se poate pune în evidență și altfel. Să presupunem că sistemul de forțe are numai componente verticale (Y_i). Este evident că una din condițiile de echilibru este ca momentul rezultant în raport cu un punct oarecare (de exemplu punctul A) să fie nul:

$$\Sigma M_{Ai} = \Sigma Y_i \cdot d_i = 0 \; ;$$

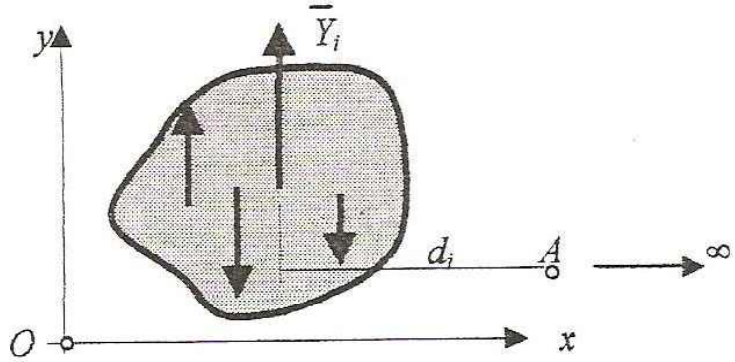


Fig.6.

Dacă punctul A este un punct aflat la o distanță mare de corp, distanță mult mai mare decât distanțele dintre forțele sistemului, atunci putem scrie relația aproximativă:

$$\Sigma M_{Ai} = (\Sigma Y_i) \cdot d \approx 0$$

deoarece toate distanțele pot fi considerate aproximativ egale (lucru care este cu atât mai adevărat cu cât distanța este mai mare). La limită putem spune că relația este îndeplinită pentru :

$$\Sigma Y_i = 0$$

adică o ***ecuație de moment este echivalentă cu o ecuație de proiecție.***

Aşa cum se poate observa însă, există şi o nedeterminare în relaţia de echivalenţă a ecuaţiei de moment cu ecuaţia de forţă. În consecinţă să analizăm aspectele care pot să apară la exprimarea echilibrului cu ajutorul a două ecuaţii de moment şi una de forţă.

După cum se ştie, la reducerea sistemelor de forţe coplanare se întâlnesc trei cazuri de reducere distincte (echilibru, cuplu şi rezultantă unică). Dacă folosim ecuaţii de moment este evident că îndeplinirea unei singure astfel de condiţii elimină posibilitatea de a reduce un sistem la cuplu. Înseamnă că rămân ca posibilităţi de reducere numai echilibrul şi rezultanta unică. Să presupunem că sistemul de forţe coplanare s-a redus la o rezultantă unică.

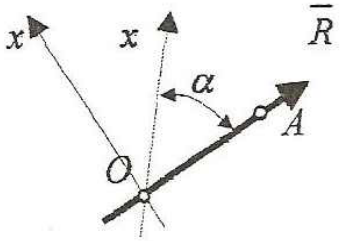


Fig.7.

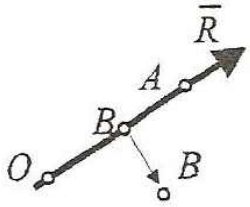


Fig.8.

Scriem ecuaţiile de moment în raport cu două puncte O şi A. Aceste ecuaţii pot fi verificate şi în cazul rezultantei unice dacă punctele se află pe suportul rezultantei. Ecuaţia de proiecţie pe o anumită direcţie, de exemplu pe Ox poate fi îndeplinită dacă această axă este perpendiculară pe direcţia rezultantei care trece prin cele două puncte. Pentru ca aceste condiţii să reprezinte chiar condiţii de echilibru, adică R=0, este suficient ca direcţia axei Ox să difere de perpendiculara pe direcţia care trece prin cele două puncte. Se observă în acest caz că numai pentru R = 0 avem ecuaţia de proiecţie îndeplinită. Rezultă că modalitatea de exprimare a echilibrului cu două ecuaţii de moment şi una de forţă poate fi folosită cu condiţia ca direcţia de proiecţie să difere de perpendiculara pe dreapta ce uneşte cele două puncte de calcul al momentelor:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ \Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ \Sigma M_{Oi} = 0\ ;\ Ox \not\perp AO$$

Aşa cum o ecuaţie de proiecţie de forţă a fost înlocuită cu o ecuaţie de moment , se poate înlocui şi a doua ecuaţie de forţă tot cu o ecuaţie de moment obţinând condiţia de echilibru cu trei ecuaţii de moment.

Şi în acest caz se pune problema eliminări cazurilor când condiţia nu exprimă de fapt echilibrul. În cazul reduceri la o rezultantă unică cele trei ecuaţii sunt verificate dacă cele trei puncte sunt situate pe suportul rezultantei. Se observă că este suficient ca din cele trei puncte un singur punct să fie în-afara suportului şi condiţia poate fi îndeplinită doar pentru R = 0. Rezultă că echilibrul poate fi exprimat şi cu trei ecuaţii de moment dacă punctele, în raport cu care se calculează momentele, nu sunt coliniare:

$$\Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ \Sigma M_{Bi} = 0\ ;\ \Sigma M_{Oi} = 0\ ;\ O,\ A,\ B \text{ necoliniare.}$$

5.3.Legăturile ideale ale solidului rigid în problema plană.

În această secţiune vom prezenta legăturile ideale ale solidului rigid în problema plană. Facem aceste precizări pentru că suntem interesaţi de studiul echilibrului solidului rigid imobilizat în plan, situaţie în care legăturile pot fi considerate întotdeauna ideale. Deşi vor fi prezentate numai legăturile din problema plană, de fiecare dată se vor face referiri la legăturile din spaţiu şi la modul lor de comportare.

Legăturile solidului rigid vor fi clasificate în funcţie de numărul gradelor de libertate pe care le suprimă. Astfel vom întâlni trei tipuri de legături ale solidului rigid: reazemul simplu, reazemul articulat şi reazemul încastrat. Vom prezenta pentru fiecare legătură modul de realizare, de schematizare şi echivalentul mecanic corespunzător legăturii.

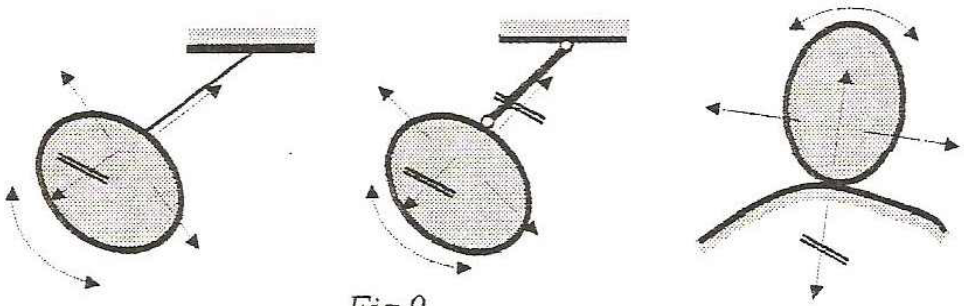


Fig.9.

- ***Reazemul simplu**. Definim ca reazem simplu legătura ideală (punctuală şi fără frecare) care suprimă corpului un singur grad de libertate . Această legătură , aşa cu se observă , a mai fost întâlnită*

ca legătură simplă la punctul material; în consecință se poate obține în același mod, adică fie prin legarea unui punct al corpului cu un fir ideal de un punct fix din plan, fie prin introducerea unei bare rigide sub formă de pendul (bară care are posibilitate de rotație în jurul extremităților ei), fie prin rezemare directă pe un alt corp fix. În toate aceste cazuri, se remarcă faptul că se suprimă posibilitatea de deplasare fie pe direcția firului, fie a barei, sau pe direcția normalei la tangenta în punctul de rezemare. Astfel un reazem simplu ***suprimă*** *întotdeauna* ***un singur grad de libertate.*** *Celelalte două posibilități de deplasare (aici translația pe direcție perpendiculară și rotația) nu sunt împiedicate de legătură.*

Reazemul simplu se schematizează în două moduri. Prima schematizare (Fig.10.) este sub forma unui triunghi care nu se leagă de corpul de rezemare și unde direcția perpendiculară pe cele două linii paralele reprezintă ***direcția reazemului simplu*** *(direcția deplasării suprimate), iar schematizarea se consideră a fi legătură bilateră. Această schemă va fi folosită mai des în cadrul mecanicii corpului rigid în problema plană. A doua schematizare se realizează sub forma unui pendul scurt (câteodată se va considera de lungime infinitezimală) ca în figura 11. Această schematizare se va folosi cu precădere în spațiu unde legătura are aceleași proprietăți și același comportament.*

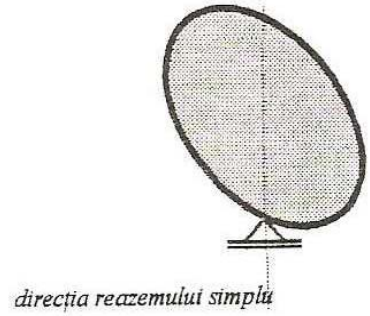


Fig.10.

Fig.11.

În baza axiomei legăturilor reazemul simplu poate fi înlocuit cu o reacțiune care va avea următoarele caracteristici:

- *Mărimea este necunoscută și se va determina din condiția de echilibru a solidului rigid;*
- *Direcția este direcția reazemului simplu;*
- *Sensul este nedeterminat (ca la orice legătură bilateră) dar nu este o necunoscută independentă deoarece după alegerea*

unui sens oarecare, semnul rezultatului confirmă sau infirmă sensul ales.

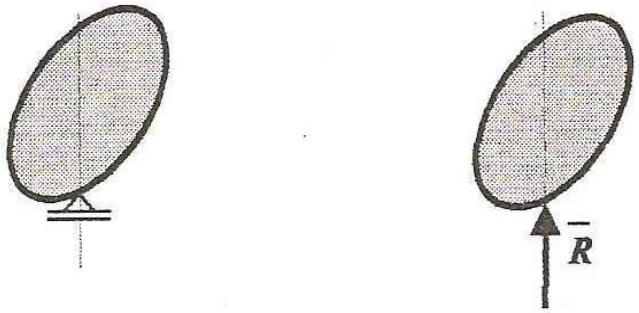


Fig.12.

Putem remarca faptul că un reazem simplu se înlocuieşte cu o reacţiune care ***introduce în calcul o singură necunoscută scalară.***

- ***Reazemul articulat*** *sau pe scurt* ***articulaţia.*** *Această legătură se defineşte ca fiind legătura ideală care fixează un punct al corpului. Fixarea unui punct este de asemenea o legătură care a fost întâlnită la punctul material ca legătură dublă în plan, adică pentru solidul rigid* ***suprimă două grade de libertate****, corpul păstrând numai posibilitatea de rotire în jurul punctului fixat. Articulaţia se poate realiza fie suspendând corpul într-un punct cu două fire care se prind în două puncte fixe, fie înlocuind firele cu doi penduli (bare cu posibilităţi de rotire în jurul capetelor).*

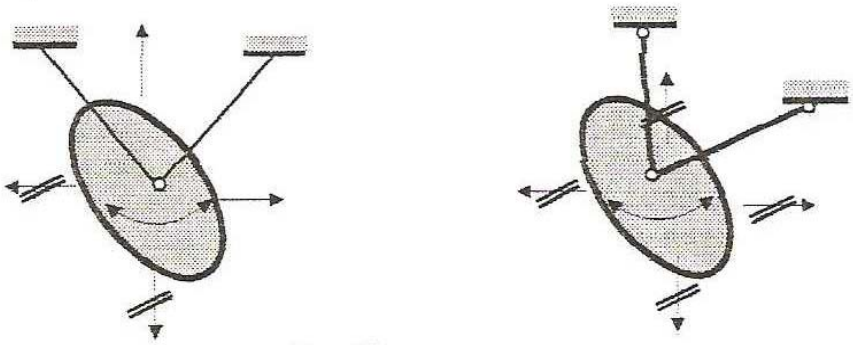


Fig.13.

Schema folosită în mecanica teoretică pentru această legătură , în plan, este sub forma unui triunghi legat de mediul de rezemare (fig.14.), dar se foloseşte şi schematizarea cu ajutorul a doi penduli scurţi (fig.15.).

Ca orice legătură, în baza axiomei legăturilor, şi articulaţia se poate înlocui cu o reacţiune având următoarele caracteristici:

Fig.14.

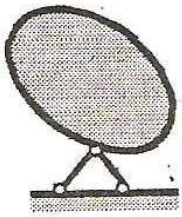


Fig.15.

- *Mărimea este necunoscută şi se va determina din condiţia de echilibru a corpului;*
- *Direcţia este necunoscută;*
- *Sensul este nedeterminat dar nu reprezintă o necunoscută independentă ci se determină ca semn al rezultatului din calculul mărimii.*

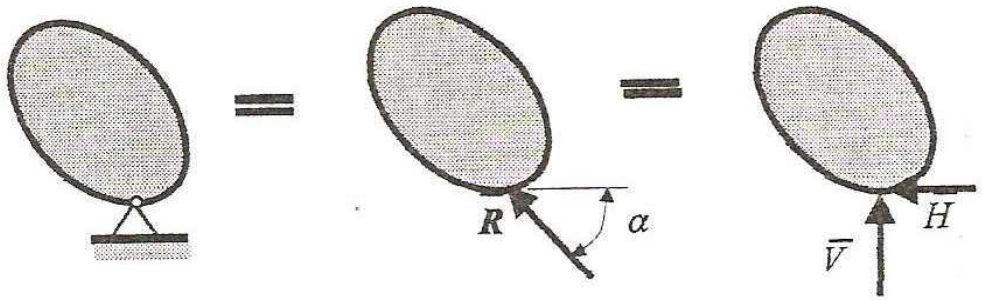


Fig.16.

În aplicaţiile curente se preferă ca în locul unei reacţiuni cu mărime şi direcţie necunoscute să se lucreze cu componentele necunoscute ale reacţiunii pe două direcţii convenabile, de obicei orizontala şi verticala. Remarcăm în final că o articulaţie suprimă corpului două grade de libertate şi introduce în calcule ***două necunoscute scalare.***

În spaţiu se întâlnesc mai multe tipuri de legături purtând numele de articulaţie şi anume: ***articulaţia sferică*** *(legătura care fixează un punct al corpului) care suprimă corpului trei grade de libertate,* ***articulaţia cilindrică cu direcţie fixă*** *(legătura care fixează o dreaptă din corp şi se mai numeşte şi* ***lagăr****) suprimă corpului patru grade de libertate şi* ***articulaţia cilindrică de direcţie variabilă*** *cunoscută şi sub denumirea de articulaţie cilindrică şi suprimând corpului două grade de libertate. Această ultimă articulaţie este de fapt o combinaţie a primelor două tipuri de articulaţii în spaţiu. Toate trei articulaţiile particularizate pentru*

problema plană devin reazem articulat.

- ***Reazemul încastrat** sau pe scurt **încastrarea.** Este legătura ideală care suprimă corpului toate gradele de libertate. Această legătură se realizează fie prin introducerea corpului în corpul de rezemare, fie prin sudarea de acesta. Legătura mai poate fi realizată şi combinând trei penduli astfel ca să se suprime cele trei grade de libertate ale corpului.*

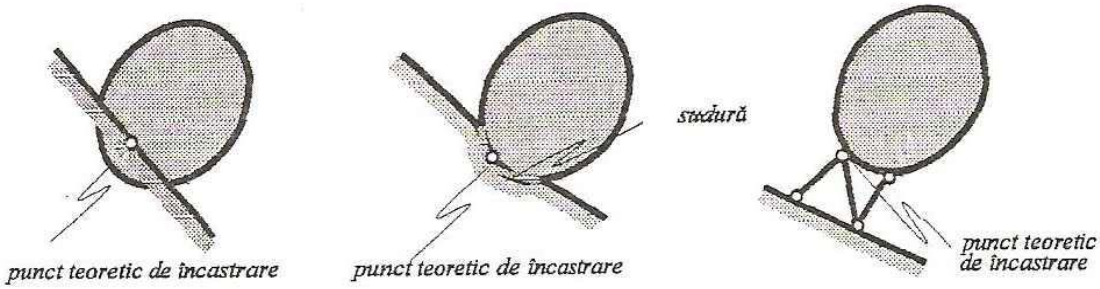


Fig.17.

*Se observă însă că această legătură, indiferent de modul de realizare, nu poate fi obținută ca o legătură punctuală. În consecință pentru respectarea definiției de legătură ideală se alege **un punct teoretic de încastrare** , punct care de obicei este centrul de greutate al suprafeței sau liniei de încastrare.*

Datorită faptului că structurile folosite pentru reprezentarea corpurilor în problemele care vor urma se schematizează sub forma unor bare, punctul teoretic de încastrare se va considera intersecția dintre suprafața de încastrare şi axa barei. Dat fiind acestea schema de reprezentare a unei încastrări va fi cea din figura 18.

*Fiind o legătură realizată pe un domeniu, încastrarea, în baza axiomei legăturilor, se va înlocui cu un sistem de forțe de legătură necunoscute în toate punctele domeniului de contact cu mediul exterior corpului. Reducând aceste forțe de legătură în punctul teoretic de încastrare se obține torsorul de reducere al reacțiunilor format din două componente: **o reacțiune forță** având mărimea şi direcția necunoscute, iar sensul nedeterminat (dar nu necunoscută independentă) şi **un moment** cu mărimea necunoscută şi sensul nedeterminat.*

Pentru simplificarea utilizării reacțiunilor, în calculele de echilibru reacțiunea forță se descompune în două componente necunoscute ca mărime pe două direcții convenabile cunoscute (de exemplu orizontale şi verticala)

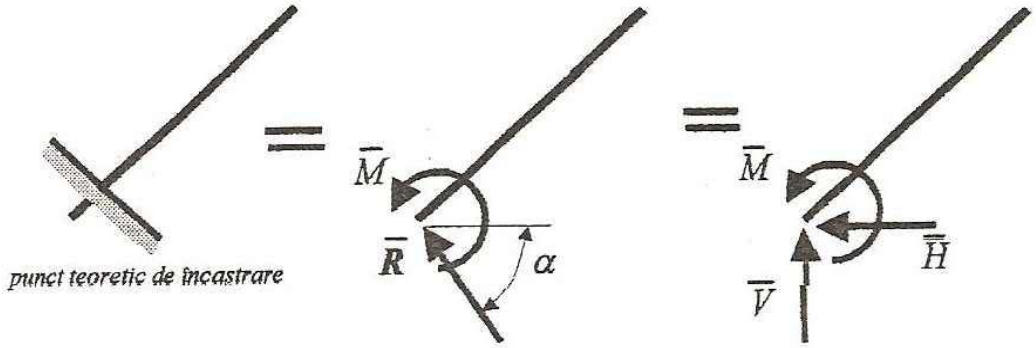


Fig.18.

Observăm că o încastrare suprimă corpului trei grade de libertate şi ***introduce în calcule trei necunoscute scalare.***

Încastrarea în spaţiu suprimă corpului şase grade de libertate.

5.4.Corp static determinat.

Scopul utilizării legăturilor este de a imobiliza solidul rigid. Acest lucru însă, în această parte a mecanicii teoretice, trebuie să fie astfel realizat încât folosind ecuaţiile posibile de scris pentru exprimarea echilibrului să se poată calcula necunoscutele din legături. Vom spune că un corp imobilizat care are numărul de necunoscute scalare din legături egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru, scalare, independente, posibile de scris este un ***corp static determinat.*** *În concluzie corpul static determinat va îndeplini două condiţii,* ***prima****:*

$$E = N$$

unde E este numărul ecuaţiilor scalare , independente posibile de scris şi care la corpul în problema plană este de trei, şi N este numărul de necunoscute scalare din legăturile corpului, iar ***a doua*** *: ca rigidul să fie imobilizat de legăturile lui. În fond prima condiţie este una cantitativă, ca sistemul de ecuaţii să fie cu acelaşi număr de necunoscute ca şi numărul de ecuaţii, iar a două una cantitativă ca sistemul de ecuaţii să fie compatibil.*

Cunoscând faptul că unui corp rigid în plan putem să-i scriem numai trei ecuaţii de echilibru independente, vom realiza schemele de imobilizare cu ajutorul legăturilor ideale.

Dacă folosim numai reazeme simple, fiecare suprimând câte un singur grad de libertate şi comportând câte o singură necunoscută scalară, pentru imobilizarea corpului avem nevoie de ***trei reazeme simple.***

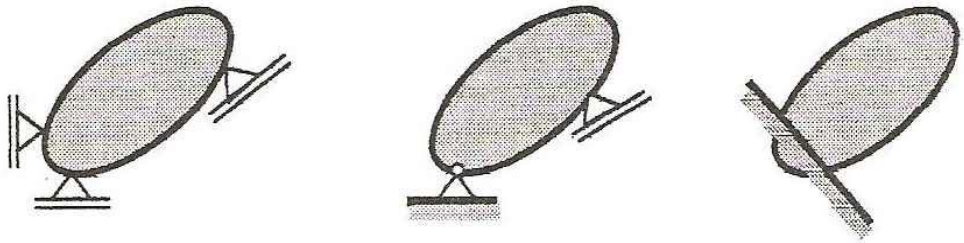


Fig.19.

Dacă vrem să obţinem imobilizarea numai cu articulaţii se constată că nu putem realiza o schemă static determinată deoarece o singură articulaţie nu imobilizează corpul, iar două articulaţii îl imobilizează dar introduce patru necunoscute scalare deci prea multe pentru a fi static determinat. Astfel că vom combina ***o articulaţie cu un reazem simplu*** *şi obţinem astfel corpul fixat cu numai trei necunoscute scalare în legături.*

În sfârşit se mai poate obţine corpul static determinat cu ***o încastrare*** *care evident imobilizează corpul (suprimă toate gradele de libertate) şi introduce numai trei necunoscute scalare.*

Dacă între numărul de ecuaţii şi numărul de necunoscute există relaţia:

$$E < N$$

vom spune că rigidul este ***static nedeterminat****, iar dacă:*

$$E > N$$

corpul păstrează grade de libertate şi vom spune că avem un ***mecanism.***

Există situaţii în care condiţia cantitativă de static determinare este îndeplinită, dar nu se îndeplineşte condiţia calitativă, adică rigidul păstrează grade de libertate. Aceste situaţii se numesc ***forme critice****. Primul caz de formă critică se obţine dacă cele* ***trei reazeme simple*** *(care ar trebui să suprime trei grade de libertate)* ***sunt paralele****. Se observă în acest caz că posibilitatea de translaţie pe direcţie perpendiculară pe*

direcţiile reazemelor simple rămâne neblocată de aceste legături.

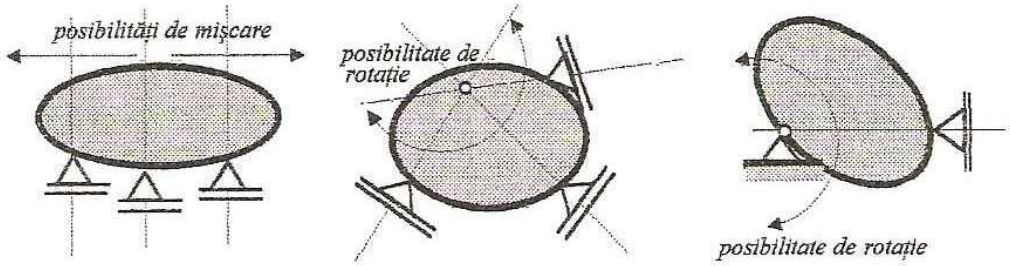


Fig.20.

O a doua formă critică se obţine dacă direcţiile celor ***trei reazeme simple sunt concurente în acelaşi punct.*** *În acest caz cunoscând faptul că deplasările dintr-o rotaţie sunt întotdeauna perpendiculare pe razele duse din centrul de rotaţie rezultă că reazemele simple nu blochează aceste posibilităţi de deplasare , deci corpul păstrează posibilitatea de rotaţie în jurul punctului de concurenţă al celor trei reazeme simple.*

În sfârşit o altă formă critică se obţine dacă ***direcţia reazemului simplu trece prin articulaţie,*** *deoarece în acest caz avem posibilitatea de rotaţie în jurul articulaţiei neblocată de legături (acelaşi motiv ca şi în cazul precedent)*

Este evident că imobilizarea cu o încastrare nu va produce niciodată formă critică.

În cele trei cazuri prezentate se observă că de fapt corpul îndeplineşte simultan condiţia de a fi static determinat (cantitativ) de a fi mecanism (păstrează grade de libertate) şi static nedeterminat (deoarece una din ecuaţii nu conţine necunoscute – proiecţia pe direcţia normală la direcţiile reazemelor paralele, în primul caz , moment în raport cu punctul de concurenţă şi în raport cu articulaţia , în al doilea şi al treilea caz) pentru două ecuaţii cu trei necunoscute.

5.5. Încărcări.

Încărcările sunt sisteme de forţe date (active) care solicită solidul rigid. În funcţie de modul de acţiune asupra corpurilor deosebim două tipuri de încărcări: ***încărcări concentrate*** *şi* ***încărcări distribuite.*** *De asemenea în funcţie de caracteristica încărcării, vom avea ca încărcări* ***forţe*** *sau* ***momente.*** *În consecinţă vom avea de-a face cu forţe*

şi momente concentrate, şi forţe şi momente distribuite. Vom prezenta în continuare aceste tipuri de încărcări şi modul de lucru cu aceste sisteme de forţe.

- ***Forţa concentrată** este forţa care acţionează punctual (într-un punct) asupra corpului rigid. Această forţă are atât efect de forţă cât şi efect de moment asupra corpului, iar aceste efecte se calculează în modul prezentat în capitolele precedente.*

Fig.21

- ***Momentul concentrat** este încărcarea echivalentă unui sistem de forţe care se reduce la un cuplu. Această încărcare acţionează într-un punct asupra corpului, lucru care se prezintă ca în figura 21. Cum însă pentru solidul rigid cuplul este un vector liber, în cazul problemelor comportând corpuri rigide de fapt nu interesează unde acţionează şi se va face abstracţie de punctul de aplicaţie. Caracteristica principală a acestei încărcări este că nu are efect de forţă (nu apare în ecuaţiile de proiecţie de forţă) iar efectul de moment este neschimbat în raport cu oricare punct (deci în orice ecuaţie de moment va păstra aceeaşi valoare şi acelaşi semn).*

Pentru încărcările distribuite vom prezenta numai forţele distribuite. Acestea se clasifică în funcţie de legea de distribuţie. Există practic o infinitate de legi de distribuţie a forţelor distribuite. Vom prezenta însă în continuare numai trei tipuri de forţe distribuite, situaţiile cele mai des întâlnite în aplicaţiile practice.

- ***Forţa distribuită uniform.** Această încărcare este un sistem de forţe distribuite continuu după o lege de variaţie constantă. Schemele de reprezentare ale acestor forţe distribuite sunt prezentate în figura 22. Schema încărcării va prezenta următoarele elemente: p intensitatea încărcării, l lungimea şi direcţia de distribuţie, direcţia şi sensul de acţiune a forţei. De exemplu în figura 22.a se reprezintă o forţă uniform distribuită, verticală, de intensitate p, distribuită pe lungimea orizontală l.*

Cum se poate observa, primele trei scheme de încărcare din figura 22 sunt sisteme de forțe paralele, iar ultima este schema unui sistem de forțe concurente. În acest capitol ne vom ocupa numai de sistemele de forțe paralele distribuite.

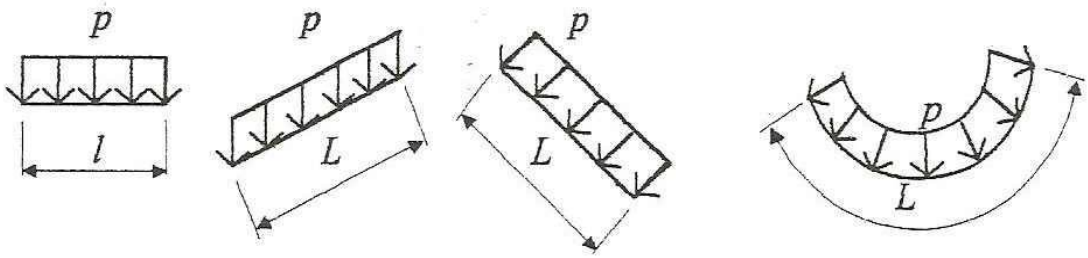


Fig.22.

Fiind sistem de forțe, acestea pot fi înlocuite de rezultantele lor având mărimile egale cu produsul dintre intensitatea forței și lungimea de distribuție:

$$R = p \cdot l \qquad sau \qquad R = p \cdot L ,$$

direcția și sensul sunt aceleași cu cele ale componentelor sistemului, iar poziția se găsește la jumătatea intervalului de distribuție.

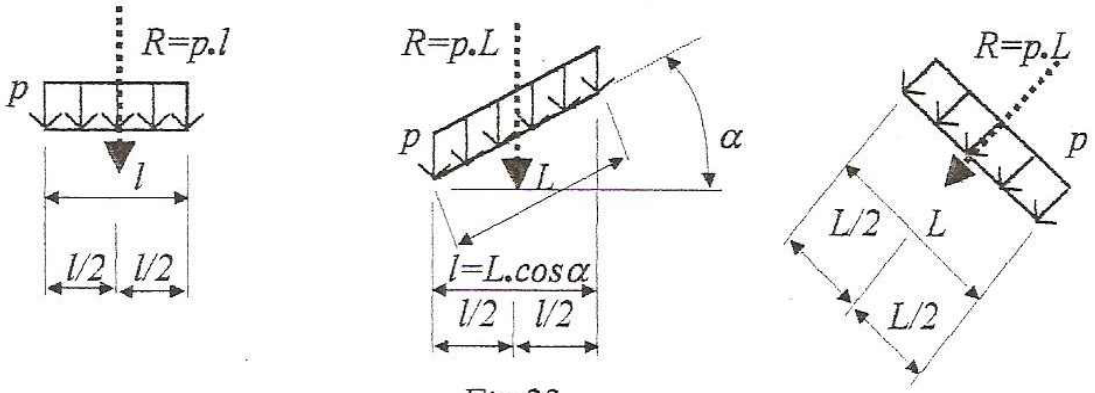


Fig.23.

- ***Forța distribuită triunghiular.*** *Ca și în cazul încărcării distribuite uniform avem de-a face cu un sistem de forțe distribuite continuu. Legea de variație a distribuției este triunghiulară, adică liniară, cu prima valoare zero. Schemele de reprezentare ale acestor forțe pun în evidență: q intensitatea maximă a încărcării, l lungimea și direcția de distribuție, direcția și sensul de acțiune al forței.*

Sistemul de forţe se înlocuieşte cu o forţă concentrată egală cu rezultanta sistemului:

$$R = \frac{pl}{2} \quad sau \quad R = \frac{pL}{2}$$

având direcţia şi sensul componentelor sistemului şi acţionând la o treime din lungimea de distribuţie de la baza triunghiului reprezentând schema de distribuţie, sau la două treimi de la vârful acestuia.

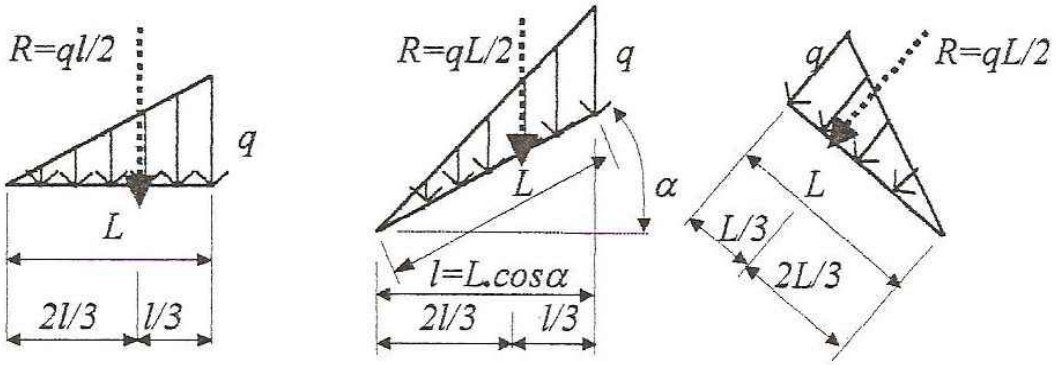


Fig.24.

Forţa distribuită trapezoidal. *Acest sistem de forţe reprezintă tot o încărcare liniară, ca şi cea triunghiulară. Pentru uşurinţa abordării, cel mai simplu mod este de a considera sistemul ca o sumă de două încărcări triunghiulare: prima cu intensitatea q_1 şi a doua cu intensitatea q_2 şi cu aceeaşi lungime de distribuţie.*

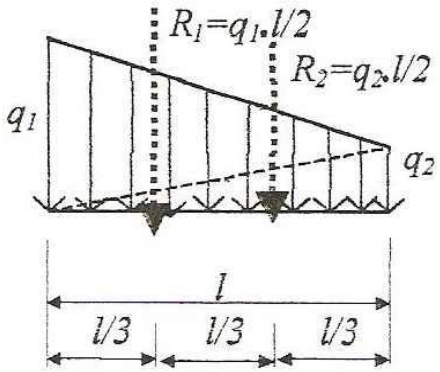


Fig.25.

Cele două rezultante care vor înlocui încărcarea trapezoidală se vor aşeza la câte o treime din lungimea de distribuţie, atât de la extremităţile încărcării cât şi între ele.

Pentru toate încărcările distribuite, în aplicaţiile în care aceste încărcări acţionează asupra corpurilor, se convine ca sensul de acţiune să fie înspre corp şi în acest caz nu mai este necesar să se reprezinte sensurile de acţiune ale încărcării.

5.6. Etapele determinării reacţiunilor din legăturile unui corp static determinat.

În rezolvarea unei probleme în care se determină reacţiunile din legăturile unui corp static determinat se parcurg următoarele etape de rezolvare:

- *1)Se verifică mai întâi dacă solidul rigid este sau nu static determinat, adică are numai trei necunoscute în legături şi nu se formează formă critică;*
- *2)Se înlocuiesc legăturile cu reacţiuni corespunzătoare;*
- *3)Se aranjează încărcările, adică forţele înclinate se descompun pe direcţiile convenabile (de obicei orizontala şi verticala), iar forţele distribuite se înlocuiesc cu rezultantele corespunzătoare tipului de încărcare. În urma acestor etape se obţine* ***schema statică de forţe****, schemă care reprezintă corpul dat liber, acţionat de două tipuri de forţe şi momente concentrate : unele cunoscute, adică încărcările şi altele necunoscute, adică reacţiunile din legături;*
- *4)Se scriu trei ecuaţii de echilibru. Dacă rigidul nu are încastrare se preferă două ecuaţii de moment în raport cu puncte care reprezintă legături (pe aici trec reacţiunile şi în consecinţă momentele lor în raport cu aceste puncte vor fi nule, deci aceste ecuaţii vor conţine mai puţine necunoscute) şi o singură ecuaţie de proiecţie de forţă. Dacă însă corpul are o încastrare se preferă două ecuaţii de proiecţie de forţe şi o singură ecuaţie de moment în raport cu încastrarea;*
- *5)Se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinut şi se obţin reacţiunile din legături. Aceste reacţiuni, cu sensurile reale, corectate de semnul rezultatului, se trec pe schema de forţe;*

- *6)Se face verificarea calculului cu ajutorul unei ecuații nefolosite la calculul reacțiunilor.*

5.7.Exemplificări.

Problema 1. *Să se calculeze reacțiunile din legături pentru corpul din figura 26.*

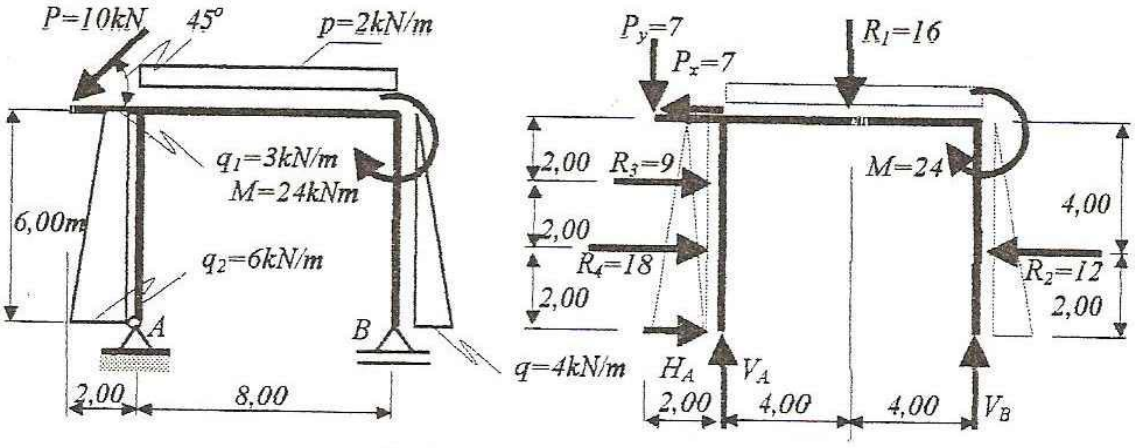


Fig.26.

Rezolvare. Etapa 1. *Corpul este static determinat având o articulație și un reazem simplu, iar direcția acestuia nu trece prin articulație.*

Etapa 2. *Vom desena mai întâi corpul fără modificări de formă și dimensiuni și fără legături, adică el devine liber. Legăturile se înlocuiesc cu reacțiuni și anume, articulația din A se va înlocui cu două reacțiuni forță pe direcțiile orizontală și verticală, V_A și H_A, deci două necunoscute, iar reazemul simplu vertical se înlocuiește cu o reacțiune necunoscută verticală V_B.*

Etapa 3. *Încărcările vor fi aranjate. Astfel forța concentrată P se va descompune în două componente: una orizontală și alta verticală:*

$$P_x = P \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 45^\circ = 7\ kN;$$
$$P_y = P \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin 45^\circ = 7\ kN,$$

forța uniform distribuită se înlocuiește cu rezultanta R_1 verticală acționând la jumătatea intervalului de distribuție:

$$R_1 = 2.\ 8 = 16\ kN,$$

Forța distribuită triunghiular se înlocuiește cu rezultanta R_2 orizontală acționând la o treime din lungimea de distribuție de la punctul B (unde se află baza triunghiului de încărcare):

$$R_2 = \frac{4.6}{2} = 12\ kN,$$

forța distribuită trapezoidal se va înlocui cu două rezultante R_3 și R_4 orizontale acționând la câte o treime din lungimea de distribuție de la extremitățile forței:

$$R_3 = \frac{3.6}{2} = 9\ kN;\quad R_4 = \frac{6.6}{2} = 18kN.$$

Observăm că s-a obținut un corp liber acționat de forțe și cuple concentrate, din care o parte sunt cunoscute (forțele date, încărcările) și o altă parte necunoscute (reacțiunile). Acest corp liber acționat de forțe și cuple concentrate pe direcții convenabile calculului se numește ***schema statică de forțe.***

Etapa 4. *Vom scrie acum trei ecuații de echilibru și vom prefera să scriem două ecuații de moment în raport cu cele două legături (deoarece în raport cu aceste puncte se anulează momentele unora din necunoscute) și o singură ecuație de proiecție de forță și anume pe orizontală. Se constată că această direcție este coliniară cu dreapta care trece prin cele două puncte în raport cu care se calculează momentele și în consecință nu este perpendiculară pe această dreaptă. Ecuațiile vor fi:*

$$\Sigma X_i:\ H_A + 18 + 9 - 7 - 12 = 0;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ -18.2 - 9.4 + 7.6 + 7.\ 2 - 16.4 - 24 + 12.2 + V_B.8 = 0\ ;$$
$$\Sigma M_{Bi} = 0\ ;\ -V_A.8 - 18.2 - 9.4 + 7.6 + 7.\ 10 + 16.4 - 24 + 12.2 = 0\ ;$$

Etapa 5. *Vom rezolva sistemul de trei ecuații cu tot atâtea necunoscute, dar observăm că datorită alegerii acestui mod de exprimare a echilibrului (cu două ecuații de moment și o singură ecuație de forță) se obțin trei ecuații independente (fiecare ecuație va conține câte o singură necunoscută). Se găsesc valorile:*

$$H_A = -8\ kN\ ;\ V_A = 13\ kN\ ;\ V_B = 10\ kN.$$

Semnul (-) pentru reacțiunea H_A înseamnă că sensul acestei reacțiuni nu a fost ales bine și anume această reacțiune acționează în sens invers decât este desenat pe schema de forțe (adică spre stânga).

Etapa 6. *Vom efectua o verificare a scrierii corecte a ecuațiilor de echilibru și a rezolvării lor, scriind o altă ecuație care însă nu a fost folosită la rezolvare. Această ecuație va fi cea de proiecție pe verticală:*

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ V_A - 7 - 16 + V_B = 0$$

ecuație care va confirma corectitudinea rezolvării.

Problema 2. *Să se calculeze reacțiunile din încastrarea A pentru corpul reprezentat în figura 27.*

Rezolvare. *Vom proceda ca în problema precedentă prin realizarea schemei statice de forțe care este corpul dat unde s-a înlocuit încastrarea cu cele trei componente de reacțiune (două forțe și un moment concentrat), iar forțele distribuite au fost înlocuite cu rezultantele corespunzătoare.*

Cele trei ecuații de echilibru vor fi două proiecții și un moment față de încastrare, deoarece în acest fel fiecare ecuație va conține câte o singură necunoscută (cele trei

reacțiuni sunt pe cele trei direcții pe care se realizează și ecuațiile). Vom avea:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ 9 - H_A - 10 = 0\ ; \longrightarrow H_A = -1\ kN$$
$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ V_A - 3 - 9 - 2{,}25 = 0\ ; \longrightarrow V_A = 14{,}25\ kN$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ M_A - 9 \cdot 2 + 3 \cdot 1{,}5 + 12 - 9 \cdot 1{,}5 - 2{,}25 \cdot 3 + 10 \cdot 10 = 0\ ;$$
$$\longrightarrow M_A = -78{,}25\ kNm.$$

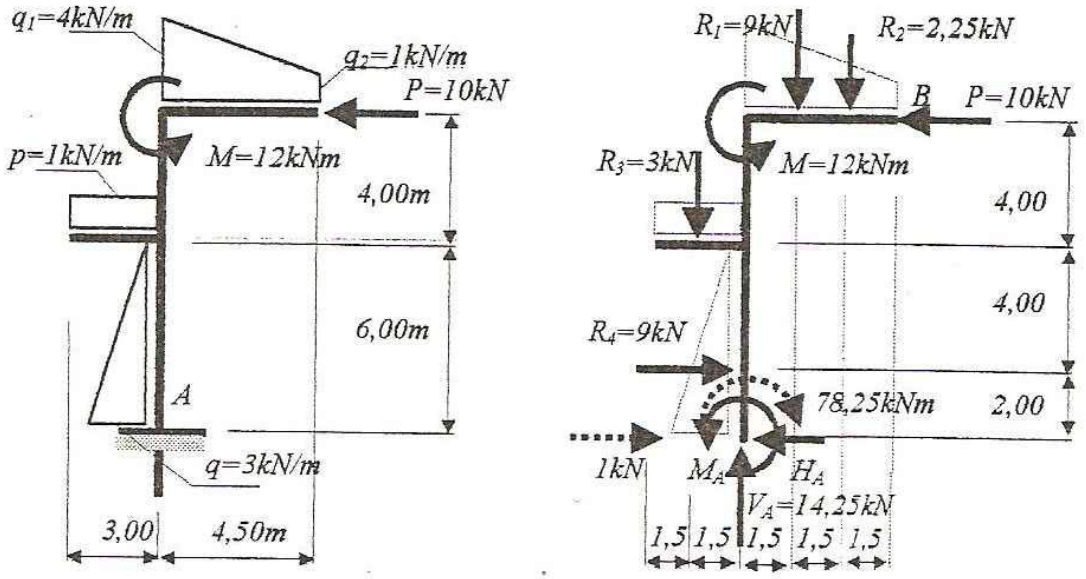


Fig.27.

Se observă că datorită scrierii convenabile a ecuațiilor fiecare ecuație conține câte o singură necunoscută și se poate rezolva independent de restul sistemului de ecuații. De asemenea, valorile negative ale rezultatelor înseamnă că acele reacțiuni sunt în realitate cu sensuri inverse și nu așa cum am ales noi la început, adică reacțiunea orizontală este cu sensul spre dreapta, iar momentul din încastrare are de fapt sensul orar. Vom reprezenta punctat aceste reacțiuni cu sensurile corecte pe schema de forțe.

Verificarea o vom face cu o ecuație de moment în raport cu un punct oarecare, de exemplu în raport cu punctul de aplicație al forței P:

$$\Sigma M_{Bi} = 0\ ;\ 2{,}25.1{,}5 + 9.3 + 12 + 3.6 + 9.8 + 1.10 - 78{,}25 - 14{,}25.4{,}5 = 0$$

Ecuația fiind verificată, calculul a fost efectuat corect.

Problema 3. *Să se calculeze reacțiunile din cele trei reazeme simple pentru corpul din figura 28.*

Rezolvare. *Procedând în mod identic ca la cele două aplicații precedente, vom obține schema statică de forțe prin înlocuirea celor trei reazeme simple cu câte o reacțiune pe direcția fiecărui reazem simplu și prin înlocuirea forțelor distribuite cu rezultantele corespunzătoare.*

În acest caz, ca și în cazurile precedente, pentru exprimarea condiției de echilibru se poate folosi una din modalitățile prezentate anterior. Pentru obținerea, însă, a unor

ecuații independente este de preferat să scriem trei ecuații de moment în raport cu cele trei puncte de intersecție, două câte două, ale direcțiilor reazemelor simple. În problema de față, întrucât două direcții sunt paralele, deci se intersectează la infinit, vom folosi totuși două ecuații de moment (în raport cu punctele A și D) și una de proiecție pe orizontală.

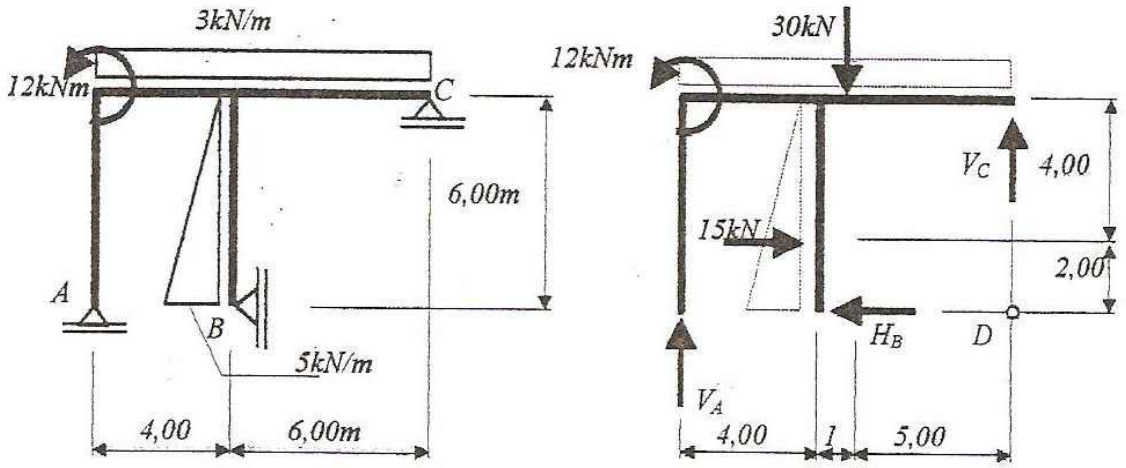


Fig.28.

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ 15 - H_B = 0\ ; \longrightarrow H_B = 15kN;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ 12 - 15 \cdot 2 - 30 \cdot 5 + V_C \cdot 10 = 0\ ; \longrightarrow V_C = 16{,}8\ kN;$$
$$\Sigma M_{Di} = 0\ ;\ -V_A \cdot 10 + 12 - 15 \cdot 2 + 30 \cdot 5 = 0\ ; \longrightarrow V_A = 13{,}2\ kN$$

Datorită obținerii ecuațiilor independente rezolvarea se face foarte ușor rezultând câte o necunoscută din fiecare ecuație.

Pentru verificare vom utiliza ecuația de proiecție pe verticală:

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ 13{,}2 - 30 + 16{,}8 = 0.$$

Problemele 4, 5, 6. *Să se determine reacțiunile din legăturile corpurilor din figurile 29., 30., 31.*

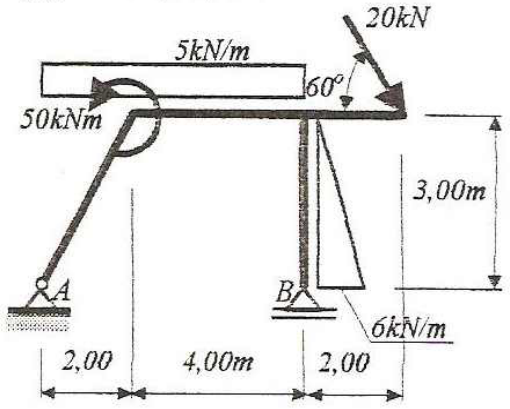


Fig.29.

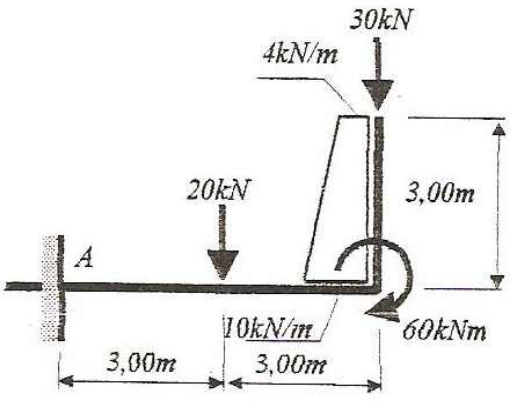


Fig.30.

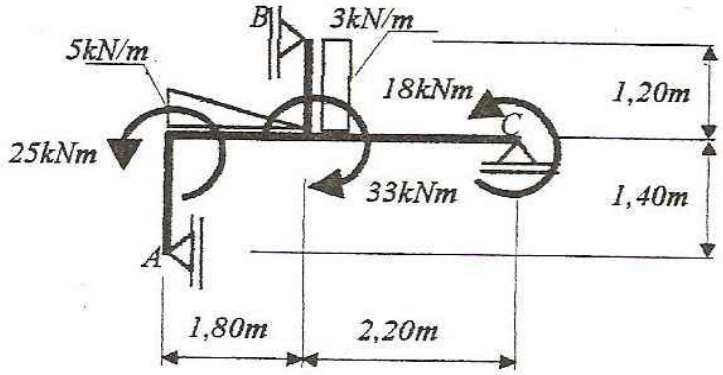


Fig.31

Capitolul 6.Sisteme de corpuri rigide.

6.1.Introducere.

În capitolul precedent am studiat echilibrul unui singur corp rigid. Dar în realitate corpurile se află în interacțiune între ele și formează ***sisteme de corpuri*** *sau* ***structuri.*** *Astfel definiția unui sistem de copuri este:* ***un ansamblu de corpuri în interacțiune mecanică.***

Pe lângă legăturile care se realizează între corpurile sistemului și mediul exterior (înconjurător), adică cele trei reazeme, la sistemele de corpuri vom întâlni și legături între corpurile sistemului. Aceste legături se vor numi ***legături interioare*** *sau* ***intermediare.*** *Vom avea de-a face cu două tipuri de legături intermediare:* ***legături simple intermediare*** *(de tipul reazemelor simple) și* ***articulații intermediare.*** *Între corpuri nu vom avea legături de tipul încastrărilor deoarece dacă două , sau mai multe corpuri sunt încastrate între ele atunci acestea vor face corp comun și ansamblul lor se poate considera un singur corp.*

- ***Legătura simplă intermediară*** *este legătura ideală dintre corpuri care* ***suprimă*** *ansamblului de corpuri* ***un singur grad de libertate.*** *Această legătură se schematizează ca un mic pendul între corpurile respective.*

Deplasarea suprimată este translația independentă a fiecărui corp pe direcția pendulului, acesta permițând doar translația împreună a celor două corpuri pe acea direcție, translațiile independente pe direcție normală la pendul ale corpurilor și rotațiile independente ale lor.

Legătura simplă intermediară dacă se suprimă se va înlocui cu o pereche de forțe de legătură egale ca mărime de aceeași direcție și cu sensuri opuse (principiul acțiunilor reciproce). Mărimea forței

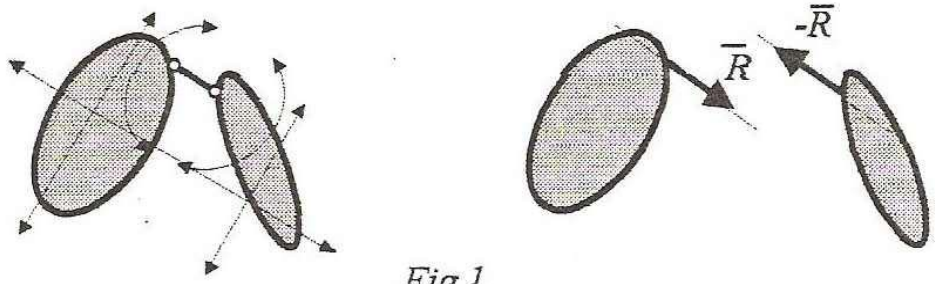


Fig.1.

de legătură este necunoscută, direcția este cea a pendulului reprezentând legătura, iar sensul este nedeterminat, dat nu o necunoscută independentă. Sensul va rezulta ca semn al rezultatului după ce s-a ales un sen arbitrar. Se rezolvă că această legătură suprimă un grad de libertate și ***introduce*** *în calcule* ***o singură necunoscută scalară*** *(mărimea forței de legătură).*

- ***Articulația intermediară*** *se poate realiza în două variante:* ***articulația intermediară simplă*** *și* ***Articulația intermediară multiplă.*** *Întrucât articulația multiplă se poate exprima ca o combinație de articulații simple, vom analiza în primul rând articulația simplă după care se va prezenta modul de operare cu o articulație multiplă.*

Prin definiție o articulație intermediară simplă este o legătură ideală care ***fixează un punct al unui corp de un punct al altui corp.*** *Legătura se schematizează sub forma unui cerc mic în punctul de legătură.*

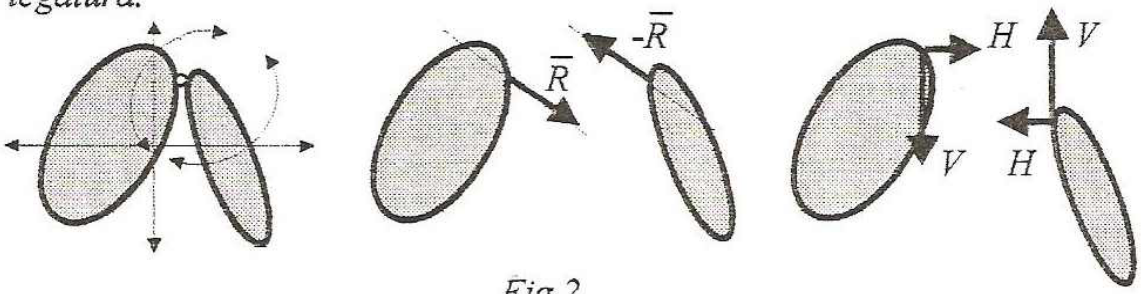


Fig.2.

Această legătură ***suprimă*** *ansamblului de două corpuri* ***două grade de libertate*** *permițând numai translația simultană a celor două corpuri pe două direcții perpendiculare și rotațiile independente ale celor două corpuri. Suprimând această legătură vom avea ca echivalent mecanic o pereche de forțe de legătură egale ca mărime, de aceeași direcție și cu sensuri opuse. Mărimea și direcția forțelor de legătură sunt necunoscute iar sensul este nedeterminat. Astfel o articulație intermediară simplă* ***introduce în calcul două necunoscute scalare.***

În general se preferă ca aceste două necunoscute să fie puse în evidență de componentele pe două direcții cunoscute ale forțelor de legătură.

Așa cum poate fi remarcat ușor, cele două legături sunt echivalente din punct de vedere mecanic cu legăturile exterioare : reazem simplu și reazem articulat.

Articulația intermediară multiplă este echivalentă cu (N_C-1) articulații intermediare simple, unde N_C este numărul de corpuri legate de acea articulație. Acest fapt poate fi observat dacă vom considera „un corp principal" de care se articulează celelalte corpuri.

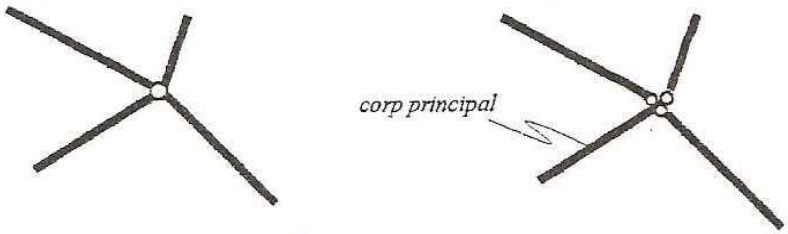


Fig.3.

În final putem spune că în cadrul sistemelor de corpuri rigide avem de-a face cu trei tipuri de forțe: ***forțe date****, sau* ***forțe active (încărcări)****,* ***forțe de legătură din legăturile exterioare*** *pe care le vom numi* ***reacțiuni*** *și* ***forțe de legătură din legăturile intermediare*** *care vor fi numite* ***forțe de legătură.***

6.2. Teoreme de echilibru.

Obiectivul principal al acestui capitol este exprimarea echilibrului sistemelor de corpuri și determinarea reacțiunilor din legăturile exterioare ale sistemului și a forțelor de legătură din legăturile intermediare.

Pentru realizarea acestui obiectiv ne putem folosi de o proprietate care s-e enunță în modul următor: ***dacă un sistem de corpuri este în echilibru (în repaus) atunci toate corpurile lui trebuie să fie în echilibru (repaus).*** *Și reciproca ei este adevărată, adică:* ***dacă fiecare corp al sistemului este în echilibru (în repaus) atunci și întregul sistem de corpuri este în echilibru (în repaus).*** *Folosind această proprietate, de fapt problema enunțată anterior este rezolvată pentru că dacă sistemul se descompune în corpuri prin suprimarea legăturilor , care se înlocuiesc cu*

forțele de legătură corespunzătoare, este suficient să studiem echilibrul unui set de corpuri separate.

Acest mod de tratare a problemei echilibrului unui sistem de corpuri are neajunsul că indiferent ce ne interesează în problemă trebuie avute în vedere toate reacțiunile și forțele de legătură. Sunt însă probleme în care forțele de legătură interioare nu interesează. Pentru eliminarea din calcul (dacă este posibil) a forțelor de legătură interioare vom enunța două teoreme de echilibru.

Mai întâi, însă , vom analiza ce se întâmplă cu forțele de legătură corespunzătoare a două corpuri oarecare din sistem. Vom considera două corpuri (I și J) având o legătură intermediară oarecare , de exemplu o articulație intermediară în punctul A.

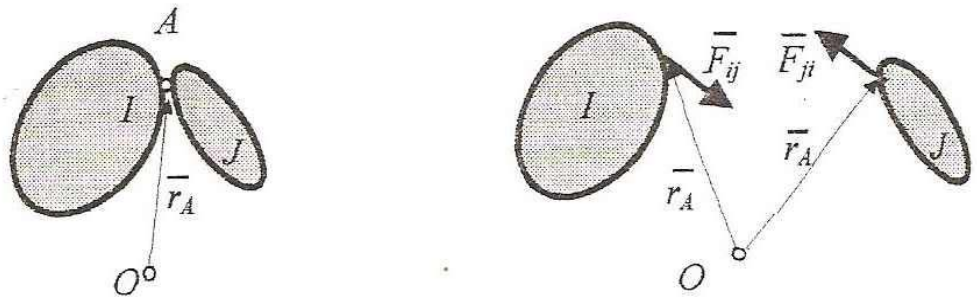


Fig.4.

După suprimarea legăturii vom avea o pereche de necunoscute egale ca mărime și de sensuri opuse, adică:

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$$

sau:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$$

Dacă calculăm momentele celor două forțe de legătură în raport cu un punct oarecare O vom obține de asemenea:

$$\bar{r}_A \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_A \times \bar{F}_{ji} = 0$$

- *Prima teoremă de echilibru se numește* ***teorema solidificării*** *și are enunțul:* ***dacă un sistem de corpuri este în echilibru atunci sistemul considerat un singur corp rigid trebuie să fie în echilibru.*** *Teorema mai poate fi enunțată și astfel :* ***pentru un sistem de corpuri în***

echilibru torsorul de reducere al tuturor forțelor exterioare (date și reacțiuni) trebuie să fie nul.

Pentru demonstrarea acestei teoreme este suficient să exprimăm (în baza proprietății enunțate anterior) echilibrul fiecărui corp al sistemului (cu ajutorul torsorului de reducere într-un punct oarecare):

$$\text{corpul 1.} \quad \begin{cases} \overline{F}_{d1} + \overline{R}_1 + \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{1j} = 0 \\ \overline{M}_O(\overline{F}_{d1}) + \overline{M}_O(\overline{R}_1) + \sum_{j=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_{1j}) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\text{corpul I.} \quad \begin{cases} \overline{F}_{di} + \overline{R}_i + \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij} = 0 \\ \overline{M}_O(\overline{F}_{di}) + \overline{M}_O(\overline{R}_i) + \sum_{j=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_{ij}) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

unde am notat $\overline{F}_{di}$ rezultanta forțelor date acționând pe corpul I, $\overline{R}_i$ rezultanta reacțiunilor de pe corpul I, $\overline{M}_O(\overline{F}_{di})$ momentul rezultant al forțelor date pe corpul I, $\overline{M}_O(\overline{R}_i)$ momentul rezultant al reacțiunilor de pe corpul I, $\sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}$ rezultanta forțelor de legătură dintre corpul I și toate celelalte corpuri și $\sum_{j=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_{ij})$ momentul rezultant al forțelor de legătură dintre corpul I și celelalte corpuri ale sistemului.

Dacă se însumează ecuațiile de forță și cele de moment pentru toate corpurile sistemului se obțin următoarele două ecuații:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{di} + \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_{di}) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{R}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_{ij}) = 0 \end{cases}$$

Datorită faptului că forțele de legătură interioare sunt egale două câte două și de sensuri opuse, sumele totale (duble) ale acestora sunt nule și de asemenea și momentele rezultante ale lor:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{M}_O(\bar{F}_{ij})=0$$

rezultând în final două ecuații vectoriale de forma:

$$\Sigma\bar{F}_{ext}=0$$
$$\Sigma\bar{M}_{Oext}=0$$

și reprezentând condițiile de echilibru ale unui solid rigid cu încărcările și legăturile exterioare aceleași cu ale sistemului.

- *Cea de-a două teoremă se numește* ***teorema echilibrului părților*** *și are următorul enunț:* ***dacă un sistem de corpuri este în echilibru atunci orice parte a sistemului este în echilibru sub acțiunea forțelor corespunzătoare părții respective.***

Această teoremă se demonstrează ca și prima dar sumele sunt parțiale și se efectuează pentru partea respectivă. Se constată că de data aceasta nu toate forțele de legătură interioare dispar din condițiile de echilibru, și anume cele de legătură cu celelalte părți ale sistemului reprezintă forțe exterioare pentru partea considerată.

Corespunzător celor două teoreme și proprietății enunțate vom dezvolta patru metode de rezolvare a sistemelor de corpuri. Aceste metode sunt: metoda echilibrului corpurilor, metoda solidificării, metoda echilibrului părților și metoda mixtă.

6.3. Sisteme static determinate.

Vom spune că un sistem este ***static determinat*** *dacă el este* ***imobilizat*** *și* ***numărul necunoscutelor scalare din legături este egal cu numărul de ecuații scalare independente posibile de scris pentru exprimarea echilibrului.***

Observăm că pentru ca un sistem să fie static determinat trebuie să îndeplinească două condiții: una cantitativă:

$$E=N$$

unde E este numărul de ecuații independente posibile de scris, iar N este numărul de necunoscute scalare din legături. Cunoscând faptul că pentru fiecare corp, în plan se pot scrie trei ecuații independente, scalare de echilibru, înseamnă că:

$$E = 3 \cdot n_C$$

în care n_C este numărul de corpuri din sistem. De asemenea se cunoaşte că o încastrare introduce trei necunoscute scalare, o articulație (un reazem articulat sau o articulație intermediară simplă) două necunoscute, iar un reazem simplu (sau o legătură simplă intermediară) câte o singură necunoscută, deci în total vom avea:

$$N = 3 \cdot n_i + 2 \cdot n_a + n_r$$

unde n_i este numărul de încastrări, n_a numărul de articulații simple (exterioare sau intermediare) iar n_r este numărul de reazeme simple (sau de legături simple intermediare). Cu acestea condiția cantitativă pentru un sistem plan de corpuri este:

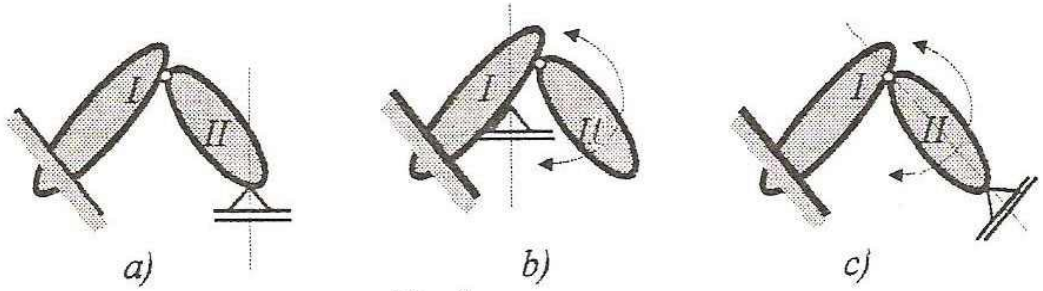
$$3 \cdot n_C = 3 \cdot n_i + 2 \cdot n_a + n_r$$

Condiția calitativă este ca legăturile să imobilizeze sistemul. Se poate observa că de fapt condiția de imobilizare este tot cea dinainte deoarece pentru a imobiliza un sistem trebuie ca numărul de grade de libertate să fie nul. Dar un corp fără legături, în plan are trei grade de libertate, deci, dacă sistemul nu ar avea legături am avea $3.n_C$ grade de libertate în total. Cum însă legăturile suprimă grade de libertate şi anume: o încastrare suprimă trei grade de libertate, o articulație două, iar o legătură simplă sau un reazem simplu una, rezultă că numărul de grade de libertate pentru un sistem cu legături este:

$$N_{gl} = 3 \cdot n_C - 3 \cdot n_i + 2 \cdot n_a + n_r = 0$$

Observăm că cele două condiții se exprimă cu aceeaşi relație. Totuşi vom spune că ***legăturile sistemului să fie situate astfel încât sistemul să fie imobilizat****. Această condiție este necesară deoarece pentru aceleaşi legături putem avea mai multe situații . Pentru exemplul din figura*

5., adică pentru un sistem format din două corpuri cu o încastrare, o articulație și un reazem simplu putem întâlni trei situații astfel încât condiția cantitativă să fie satisfăcută și anume: a) în figura 5.a sistemul este static determinat pentru că corpul I având o încastrare este imobilizat deci articulația intermediară devine o articulație fixă (are același efect mecanic ca și un reazem articulat) și corpul II cu o articulație fixă și un reazem simplu este de asemenea un corp imobilizat:



a) *b)* *c)*

Fig.5.

b)în figura 5.b sistemul nu este static determinat deoarece corpul Ii nu are suficiente legături pentru a fi imobilizat (o singură articulație permite corpului rotația în jurul acelei articulații), pe când corpul I are prea multe legături pentru a fi static determinat:

c)în figura 5.c deși sistemul pare să fie static determinat totuși condiția nu este îndeplinită deoarece corpul II este o formă critică (direcția reazemului simplu trece prin articulație) și permite rotații în jurul articulației.

Verificarea imobilității sistemului se face verificând fiecare corp separat dacă este imobilizat (cele trei situații de la corpurile rigide) cunoscând că o articulație intermediară devine o articulație fixă dacă este în legătură cu un corp imobilizat. În afara celor trei cazuri prezentate la solidul rigid mai pot exista și alte situații dar toate se pot reduce la cele trei prezentate la corpul rigid. O situație frecvent întâlnită este atunci când două corpuri au fiecare câte do articulație fixă și între corpuri există o articulație intermediară. În acest caz se spune că avem un ***cadru triplu articulat*** *. Dacă cele trei articulații nu sunt coliniare sistemul celor două corpuri este static determinat. Faptul că acest sistem este imobilizat se verifică foarte ușor reducând la cazul al doilea de imobilizare prin faptul că dacă primul corp se consideră un pendul (corp rigid cu două articulații) acesta are efectul mecanic al unui reazem simplu deci al doilea corp este imobilizat. În același mod se judecă imobilizarea primului corp și deci sistemul celor două corpuri este static determinat dacă direcția*

reazemului simplu nu trece prin articulație adică dacă cele trei articulații nu sunt coliniare.

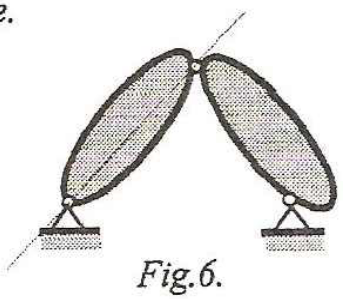


Fig.6.

6.4.Metoda echilibrului corpurilor componente.

Această metodă are la bază proprietatea enunțată și anume faptul că dacă sistemul este în echilibru atunci și fiecare corp al sistemului este în echilibru. În consecință sistemul se separă în corpurile componente care sub acțiunea încărcărilor corespunzătoare, a reacțiunilor din legăturile exterioare și a forțelor de legătură din legăturile intermediare trebuie să fie în echilibru.

Metoda se folosește în felul următor:

- *1)Se verifică în primul rând condiția de determinare statică a sistemului , adică faptul că problema poate fi rezolvată;*
- *2)Se separă sistemul în corpurile componente fără modificarea formei și dimensiunilor lor și se încarcă fiecare corp cu : încărcarea corespunzătoare corpului, aranjată convenabil, legăturile înlocuite cu reacțiuni și legăturile intermediare înlocuite cu forțele de legătură, perechi , egale și de sensuri opuse pe corpurile legate de legătură. În cazul în care legăturile intermediare sunt articulații multiple se va proceda în modul următor: se consideră un corp, dintre cele legate de acea legătură „corp principal" și se consideră toate celelalte corpuri articulate de acest corp. Echivalentul mecanic al fiecărei articulații simple fiind câte două perechi de necunoscute opuse ca sens se obține schema din figura 7.*

Ceea ce rezultă reprezintă schema statică de forțe pentru metoda echilibrului corpurilor componente.

- *3)Se scriu câte trei ecuații de echilibru scalare pentru fiecare corp ca și în cazul solidului rigid cu mențiunea că dacă avem posibilitatea de alegere , în general ecuațiile de moment se vor scrie în*

raport cu legăturile exterioare. Se obține astfel un sistem de $3n_C$ ecuații cu tot atâtea necunoscute;

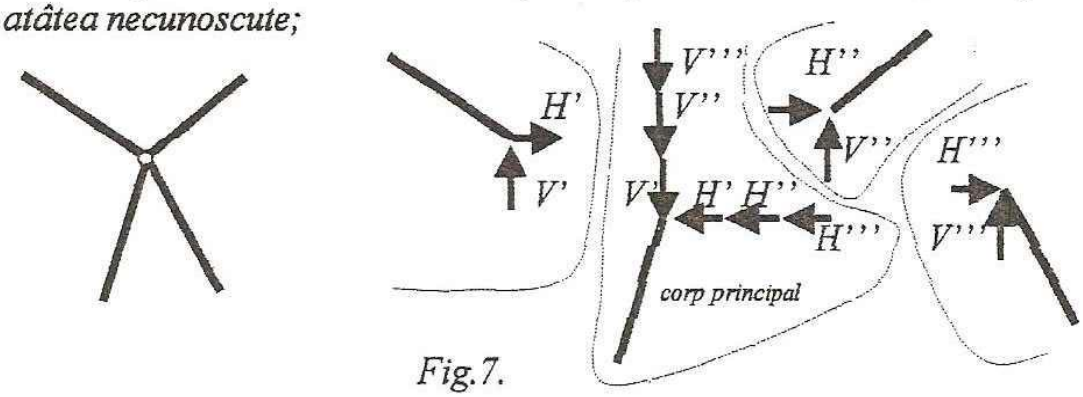


Fig.7.

- *4)Se rezolvă sistemul de ecuații obținut;*
- *5)Se verifică corectitudinea scrierii ecuațiilor și a rezolvării sistemului pentru fiecare corp separat cu câte o ecuație nefolosită la rezolvarea sistemului.*

6.5.Exemplificări.

Problema 1. *Se dă un sistem de corpuri ca în figura 8. Să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare și forțele de legătură din legăturile intermediare.*

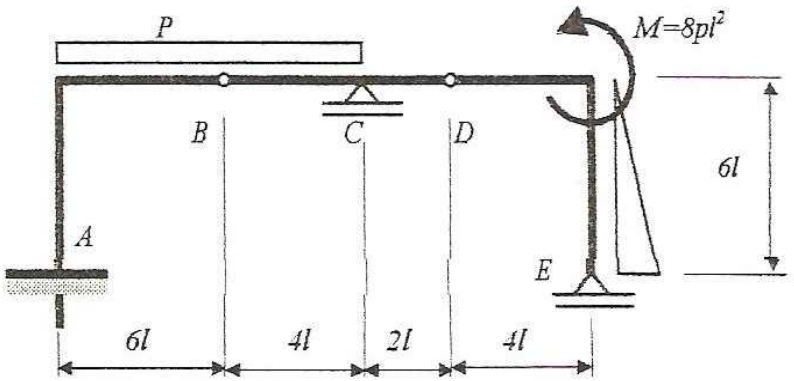


Fig.8.

Rezolvare. Etapa 1. *Sistemul de corpuri este format din trei corpuri și are o încastrare în A, două reazeme simple în C și E și două articulații intermediare simple în B și D. În consecință condiția cantitativă de determinare statică este îndeplinită:*

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2$$

Condiția calitativă de imobilizare se verifică în modul următor: corpul AB având o încastrare este un corp fix și în consecință articulația intermediară din B devine o

articulație fixă, astfel că și corpul BCD este imobilizat având o articulație fixă (în B) și un reazem simplu a cărei direcție nu trece prin articulație. Articulația intermediară din D se transformă de asemenea în articulație fixă și deci și ultimul corp DE cu o articulație fixă și un reazem simplu este corp fix.

Etapa 2. *Descompunem sistemul de corpuri în cele trei corpuri componente prin eliminarea legăturilor intermediare din B și D.*

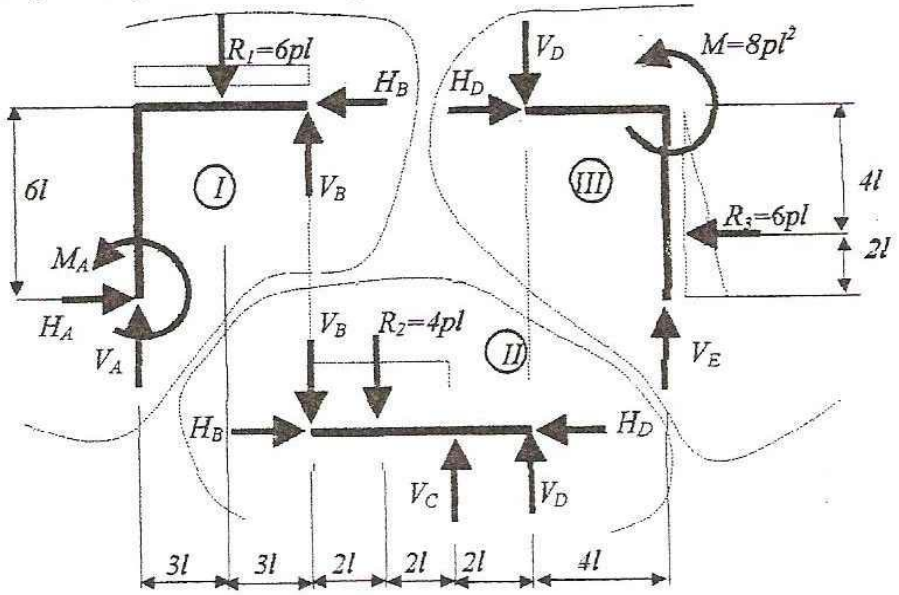


Fig.9.

Încărcăm fiecare corp cu forțele exterioare corespunzătoare : forța R_1 pentru corpul I, forța R_2 pentru corpul Ii și momentul concentrat și forța R_3 pentru corpul III. Legăturile exterioare și cele intermediare se înlocuiesc cu reacțiunile corespunzătoare și forțele de legătură , care sunt perechi egale și de sensuri opuse. Se obține în final schema de forțe din figura 9. reprezentând cele trei corpuri separate și încărcate cu forțe și momente concentrate, pe direcții convenabile, din care o parte sunt cunoscute (încărcările) și o altă parte sunt necunoscute (reacțiuni și forțe de legătură).

Etapa 3. *Pentru fiecare corp vom scrie câte trei ecuații de echilibru și anume: pentru corpul I, care are o încastrare, vom prefera două ecuații de proiecție de forță și o ecuație de moment în raport cu încastrarea, iar pentru celelalte două corpuri vom prefera două ecuații de moment și o singură ecuație de proiecție. Ecuațiile vor fi:*

-pentru corpul I :

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; H_A - H_B = 0 \; ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; V_A - 6pl + V_B = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0 \; ; \; M_A - 6pl \cdot 3l + V_B \cdot 6l + H_B \cdot 6l = 0 \; ;$$

-pentru corpul II:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; H_B - H_D = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Bi} = 0 \; ; \; -4pl \cdot 2l + V_C \cdot 4l + V_D \cdot 6l = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Ci} = 0 \; ; \; V_B \cdot 4l + 4pl \cdot 2l + V_D \cdot 2l = 0 \; ;$$

-pentru corpul III:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ H_D - 6pl = 0;$$
$$\Sigma M_{Di} = 0;\ 8pl^2 - 6pl \cdot 4l + V_E \cdot 4l = 0\ ;$$
$$\Sigma M_{Ei} = 0;\ V_D \cdot 4l - H_D \cdot 6l + 8pl^2 + 6pl \cdot 2l = 0$$

Etapa 4. *Avem un sistem de nouă ecuații cu tot atâtea necunoscute care prin rezolvare va da următoarele soluții căutate:*

$$H_D = 6pl\ ;\ V_E = 4pl\ ;\ V_D = 4pl\ ;\ H_B = 6pl\ ;\ V_C = -4pl;\ V_B = -4pl\ ;$$
$$H_A = 6pl\ ;\ V_A = 10pl\ ;\ M_A = 6pl^2.$$

Se observă că rezolvarea se începe de la corpul III care are numai trei necunoscute, deci poate fi rezolvat în totalitate independent de celelalte corpuri ale sistemului. Apoi urmează corpul II și ultimul corp rezolvat va fi corpul I.

Reacțiunile găsite se vor pune pe schema de forțe cu sensurile reale, adică vom schimba sensurile celor două reacțiuni rezultate cu semnul minus.

Etapa 5. *Verificarea rezultatelor se va efectua pentru fiecare corp cu câte o ecuație nefolosită la rezolvare:*

- *corpul I :* $\Sigma M_{Bi} = 0;\ M_A + H_A \cdot 6l - V_A \cdot 6l + 6pl \cdot 3l = 0\ ;$
- *corpul II:* $\Sigma Y_i = 0\ ;\ -V_B - 4pl + V_C + V_D = 0;$
- *corpul III:* $\Sigma Y_i = 0\ ;\ -V_D + V_E = 0.$

Problema 2. *Să se calculeze reacțiunile și forțele de legătură pentru sistemul de corpuri din figura 10.*

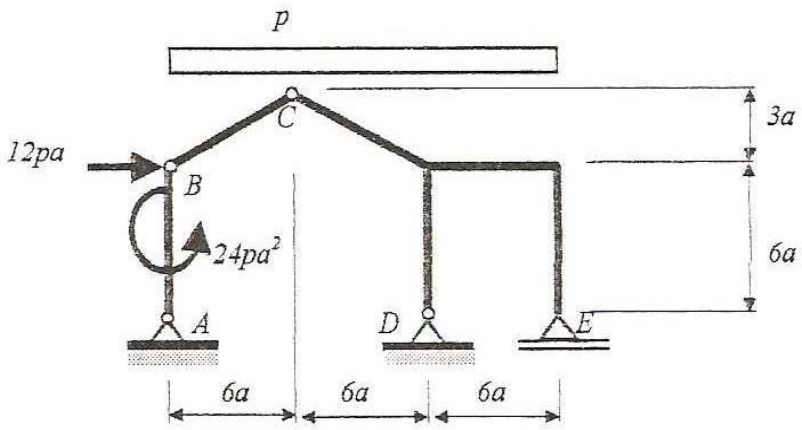


Fig.10.

Rezolvare. *Sistemul este format din trei corpuri (AB, BC și CDE) și este static determinat:*

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1$$

având patru articulații simple și un reazem simplu. Sistemul este și imobilizat deoarece corpul

CDE cu o articulație și un reazem simplu este un corp fix, articulația intermediară din C devine o articulație fixă și primele două corpuri cu două articulații fixe și una intermediară între ele (necoliniare) formează un sistem imobil.

Desfacem sistemul în cele trei corpuri componente și încărcăm fiecare corp cu încărcările ce revin corpurilor, cu reacțiunile din legăturile exterioare și cu forțele de legătură din legăturile intermediare. Forța de 12pa acționând în articulația intermediară B se poate așeza pe oricare din cele două corpuri care vin în acea articulație.

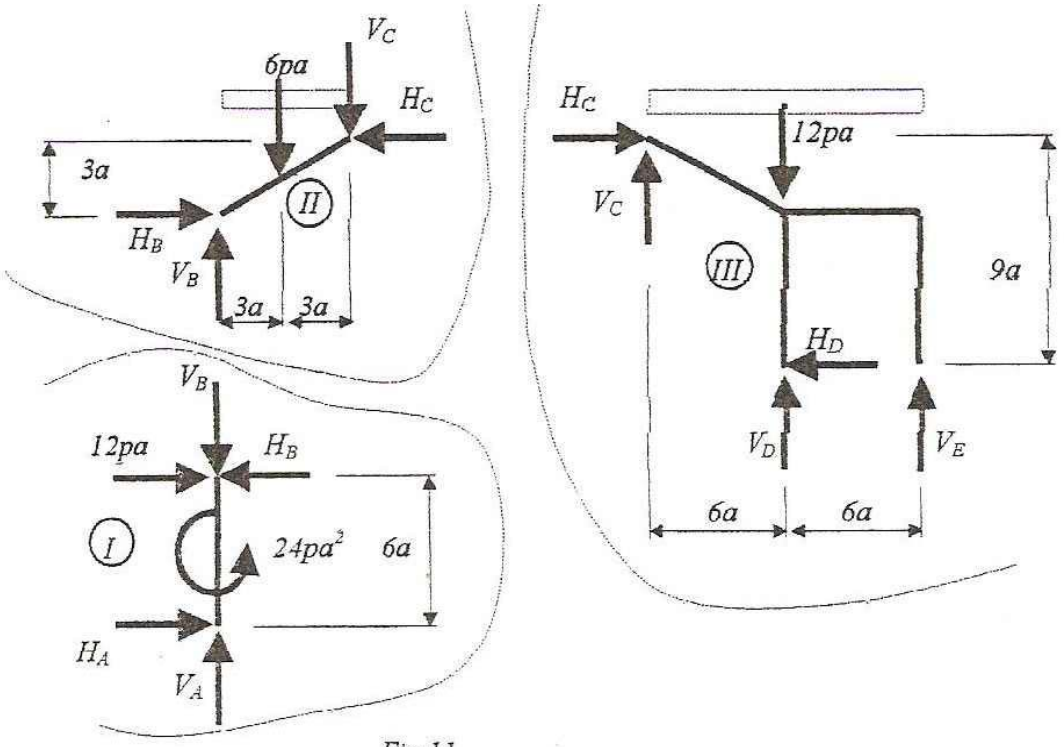


Fig.11.

Ecuațiile de echilibru pentru cele trei corpuri vor fi:

$$I \quad \begin{cases} \Sigma Y_i = 0 \; ; \; V_A - V_B = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Ai} = 0 \; ; \; 24pa^2 + H_B \cdot 6a - 12pa \cdot 6a = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Bi} = 0 \; ; \; 24pa^2 + H_A \cdot 6a = 0 \; ; \end{cases}$$

La acest corp proiecția nu poate fi efectuată pe direcția orizontală deoarece dreapta care trece prin punctele A și B este verticală.

$$II \quad \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \; ; \; H_B - H_C = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Bi} = 0 \; ; \; -6pa \cdot 3a - V_C \cdot 6a + H_C \cdot 3a = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Ci} = 0 \; ; \; H_B \cdot 3a - V_B \cdot 6a + 6pa \cdot 3a = 0 \; ; \end{cases}$$

$$III \quad \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \; ; \; H_C - H_D = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Di} = 0 \; ; \; -H_C \cdot 9a - V_C \cdot 6a + V_E \cdot 6a = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Ei} = 0 \; ; \; -H_C \cdot 9a - V_C \cdot 12a + 12pa \cdot 6a - V_D \cdot 6a = 0 \; ; \end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului de nouă ecuații cu tot atâtea necunoscute observăm că primele două corpuri au șase necunoscute, deci putem rezolva aceste două corpuri. Rezultă în final:

$$V_A = 7pa\ ;\ H_A = -4pa\ ;\ V_B = 7pa\ ;\ H_B = 8pa\ ;\ V_C = pa\ ;\ H_C = 8pa;$$
$$V_D = -2pa\ ;\ H_D = 8pa\ ;\ V_E = 13pa.$$

Verificarea se va efectua cu ajutorul ecuațiilor:

$$\sum_{I} X_i = 0\ ;\ H_A - 12pa - H_B = 0\ ;$$
$$\sum_{II} Y_i = 0\ ;\ V_B - 6pa - V_C = 0\ ;$$
$$\sum_{III} Y_i = 0\ ;\ V_C - 12pa + V_D + V_E = 0\ ;$$

Problema 3. *Să se calculeze reacțiunile și forțele de legătură din legăturile exterioare și intermediare pentru sistemul din figura 12.*

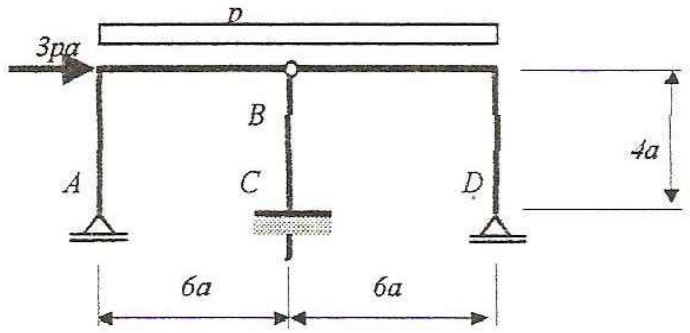


Fig.12.

Rezolvare. *Sistemul este format din trei corpuri și are o încastrare, două reazeme simple și o articulație intermediară dublă (articulație care face legătura între trei corpuri) în B. Astfel că este static determinat:*

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2$$

și corpul BC având o încastrare este fix, deci articulația intermediară din B devine o articulație fixă pentru ambele corpuri AB și BD, care având câte un reazem simplu sunt de asemenea corpuri fixe.

Vom desface sistemul în corpurile componente și pentru înlocuirea articulației intermediare din B vom considera corpul BC ca fiind corpul principal, iar celelalte două corpuri se articulează de acesta. Se obține schema de forțe din figura 13.

Ecuațiile de echilibru pentru cele trei corpuri sunt:

$$I \quad \begin{cases} \Sigma X_i = 0\ ;\ 3pa - H_{B1} = 0\ ; \\ \Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ -3pa \cdot 4a - 6pa \cdot 3a + H_{B1} \cdot 4a + V_{B1} \cdot 6a = 0\ ; \\ \Sigma M_{Bi} = 0\ ;\ -V_A \cdot 6a + 6pa \cdot 3a = 0\ ; \end{cases}$$

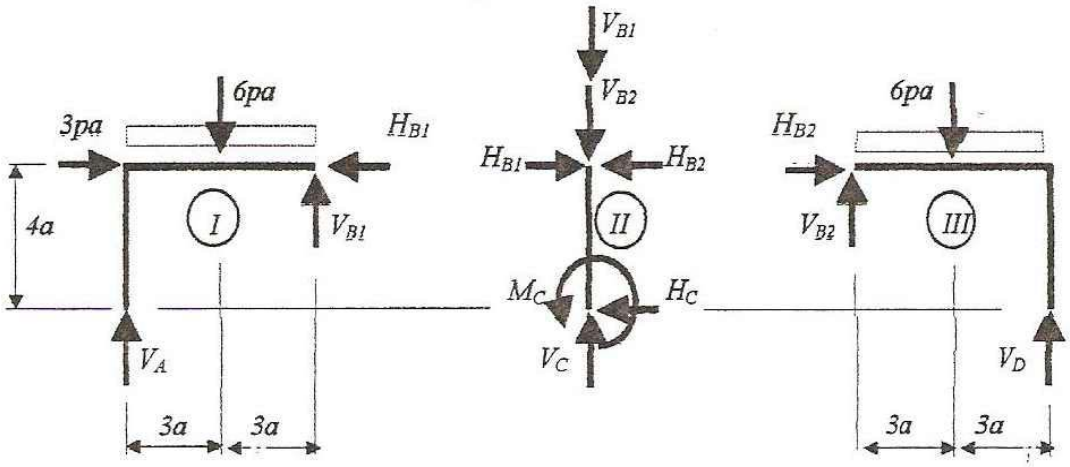


Fig.13.

$$II \quad \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \; ; \; H_{B1} - H_{B2} - H_C = 0 \; ; \\ \Sigma Y_i = 0 \; ; \; V_C - V_{B2} - V_{B1} = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Ci} = 0 \; ; \; M_C + H_{B2} \cdot 4a - H_{B1} \cdot 4a = 0 \; ; \end{cases}$$

$$III \quad \begin{cases} \Sigma X_i = 0 \; ; \; H_{B2} = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Bi} = 0 \; ; \; -6pa \cdot 3a + V_D \cdot 6a = 0 \; ; \\ \Sigma M_{Di} = 0 \; ; \; -H_{B2} \cdot 4a - V_{B2} \cdot 6a + 6pa \cdot 3a = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații obținut se vor găsi următoarele valori:

$V_A = 3pa \; ; \; H_{B1} = 3pa \; ; \; V_{B1} = 3pa \; ; \; H_{B2} = 0 \; ; \; V_{B2} = 3pa \; ; \; H_C = 3pa;$
$V_C = 6pa \; ; \; M_C = 12pa^2 \; ; \; V_D = 3pa.$

Pentru verificare vom folosi ecuațiile:

$$\sum_{I} Y_i = 0 \; ; \; V_A - 6pa + V_{B1} = 0 \; ; \; \sum_{II} M_{Bi} = 0 \; ; \; M_C - H_C \cdot 4a = 0 \; ;$$

$$\sum_{III} Y_i = 0 \; ; \; V_{B2} - 6pa + V_D = 0.$$

Problemele 4, 5, 6. *Să se calculeze reacțiunile și forțele de legătură din legăturile sistemelor reprezentate în figurile 14, 15 și 16.*

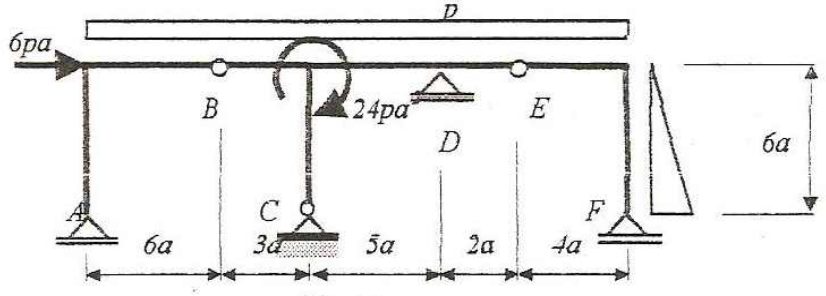


Fig.14.

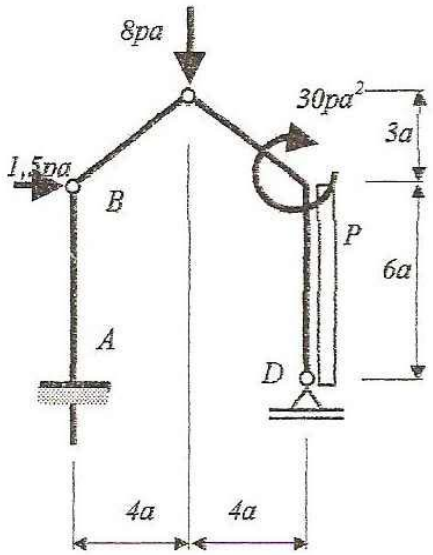


Fig.15.

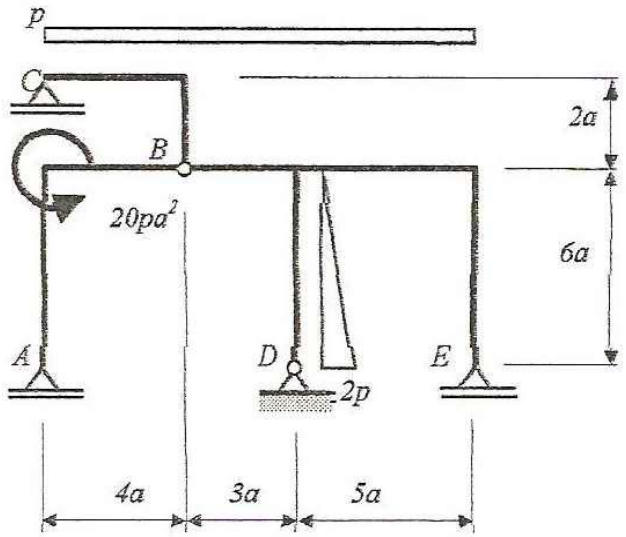


Fig.16.

6.6. Unităţi structurale

Înainte de a prezenta următoarele trei metode de rezolvare a sistemelor de corpuri vom defini câteva elemente privitoare la rolul corpurilor şi al părţilor în cadrul unui sistem. Vom defini ca ***unităţi structurale, corpuri sau părţi ale sistemului având un rol bine definit în cadrul structurii.*** *Interesându-ne , în mod special, două aspecte ale sistemelor în cadrul rezolvării lor, ţi anume: imobilizarea lor şi modul de rezolvare al sistemului, vom defini unităţile structurale în funcţie de aceste două criterii. Astfel vom avea de-a face cu corpuri şi părţi principale şi secundare.*

Corpul principal *este acel corp al sistemului care are suficiente legături exterioare pentru a fi imobilizat independent de restul sistemului. Datorită acestui lucru, numărul de necunoscute din legăturile (exterioare şi intermediare), ale corpului principal, este întotdeauna mai mare decât trei şi în consecinţă corpul principal nu poate fi rezolvat independent de celelalte părţi sau corpuri ale sistemului.*

Corpul secundar *este acel corp al sistemului de corpuri care nu are suficiente legături exterioare pentru a fi imobilizat fără aportul celorlalte părţi sau corpuri ale sistemului dar are numai trei necunoscute scalare în legăturile sale. Astfel corpul secundar se poate rezolva independent de restul sistemului de corpuri.*

***Partea principală** a unui sistem este acea parte care are suficiente legături exterioare pentru a fi complet imobilizat, independent de restul sistemului de corpuri. Partea principală are întotdeauna mai mult de trei ori numărul corpurilor din acea parte, necunoscute în legăturile sale şi în consecinţă această parte nu poate fi rezolvată independent de restul sistemului.*

***Partea secundară** a unui sistem este acea parte care nu are suficiente legături exterioare pentru a se imobiliza fără aportul celorlalte părţi ale sistemului şi numărul de necunoscute scalare din legături este de trei ori numărul de corpuri din partea respectivă. În consecinţă această parte poate fi rezolvată independent de restul sistemului de corpuri.*

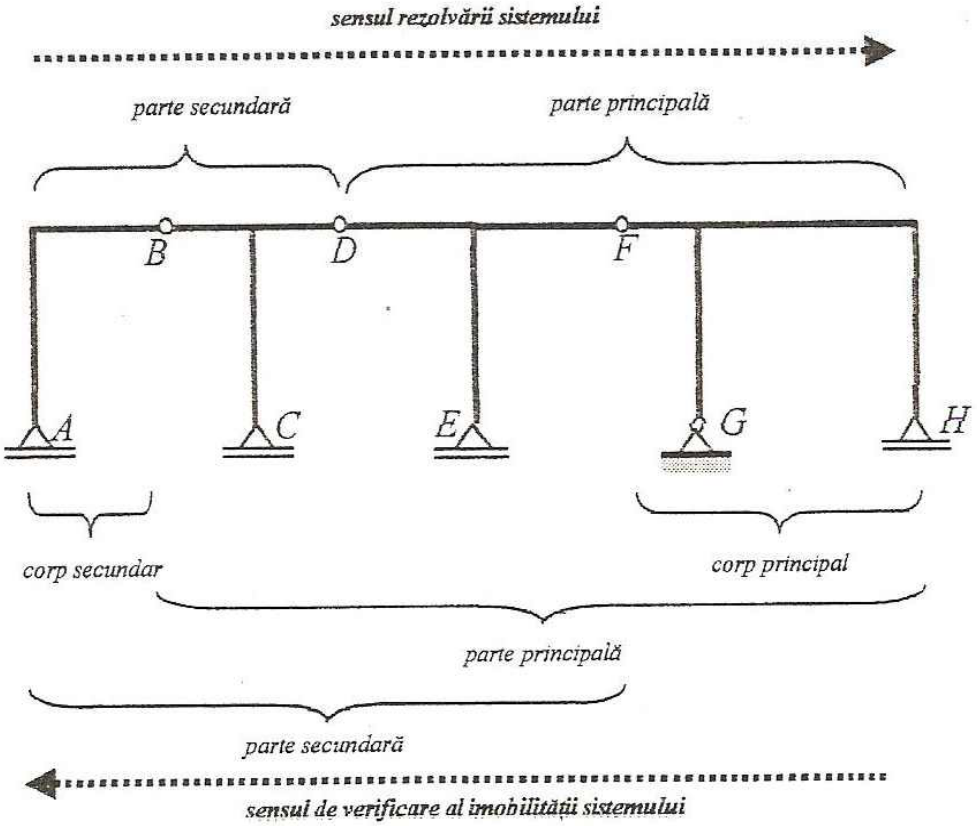


Fig.17.

Trebuie făcută precizarea că corpurile şi părţile principale, datorită legăturilor exteriore suficiente imobilizării lor, transmit direct încărcările la mediul exterior fără a le mai transmite şi corpurilor

sau părţilor vecine, iar corpurile şi părţile secundare transmit încărcările şi la celelalte părţi ale sistemului.

Unele corpuri pot face parte simultan din ambele categorii de părţi. Pentru sistemul prezentat în figura 17, corpul FGH este corp principal datorită faptului că are un reazem simplu şi o articulaţie. Pe de altă parte acest corp conţine cinci necunoscute în legăturile lui (două în articulaţia intermediară F, două în reazemul articulat G şi una în reazemul simplu din H), deci nu poate fi rezolvat independent de restul sistemului.

Corpul AB este însă un corp secundar având numai un singur reazem simplu ca legătură cu mediul exterior (fără aportul articulaţiei din B nu poate fi imobilizat), dar are numai trei necunoscute în legăturile lui , deci poate fi rezolvat fără aportul altor părţi ale sistemului .

Partea formată din corpurile DEF şi FGH este parte principală fiindcă are suficiente legături exterioare pentru a fi imobilizată (corpul FGH este un corp principal deci este fixat, în consecinţă articulaţia intermediară din F devine o articulaţie fixă şi deci corpul DEF având o articulaţie fixă şi un reazem simplu este de asemenea un corp fix). Această parte are în legături opt necunoscute scalare (câte două în D , F şi G şi câte o necunoscută în E şi H).

Partea formată din primele două corpuri este o parte secundară (are numai două reazeme simple cu exteriorul) şi în legături are numai şase necunoscute scalare (două corpuri ari trei necunoscute) deci poate fi rezolvată independent de celelalte două corpuri ale sistemului.

Se poate observa, judecând în acelaşi mod, că partea formată din corpurile BCD, DEF şi FGH este de asemenea o parte principală iar partea formată din primele trei corpuri (AB, BCD şi DEF) este parte secundară.

Verificarea imobilităţii sistemului (a condiţiei de determinare statică) se face începând de la corpul sau partea principală şi continuând spre corpul sau partea secundară, iar rezolvarea sistemului începe întotdeauna de la corpul sau partea secundară şi se termină cu partea sau corpul principal.

Aceste cunoştinţe vor face ca o dată cu verificarea condiţiei de determinare statică a unui sistem, să cunoaştem şi corpul sau partea de unde vom începe rezolvarea sistemului, astfel că scrierea ecuaţiilor de echilibru se poate face în ordinea rezolvării lor şi în consecinţă rezultatele obţinute se pot folosi în următoarele ecuaţii, rezolvarea sistemului efectuându-se din aproape în aproape.

6.7.Metoda solidificării.

Metoda solidificării are la bază teorema solidificării, adică exprimă echilibrul sistemului ca şi când acesta ar fi un singur corp. Metoda se foloseşte atunci când numărul de necunoscute exterioare este trei, deci atunci când folosind teorema solidificării sistemul de ecuaţii obţinut poate fi rezolvat.

Metoda se foloseşte în modul următor: 1) mai întâi se verifică condiţia de determinare statică şi faptul că numărul de necunoscute exterioare este de trei; 2)se realizează schema de forţe ca şi când sistemul de corpuri ar fi un singur corp, adică considerând blocate articulaţiile intermediare; 3) se scriu trei ecuaţii de echilibru; 4) se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinut şi, 5) se efectuează o verificare cu o ecuaţie care nu s-a folosit pentru rezolvarea sistemului.

Cum poate fi observat cu uşurinţă, metoda se foloseşte exact ca pentru un singur corp rigid.

6.8.Exemplificare.

Problema 7. *Să se calculeze reacţiunile din legăturile exterioare pentru sistemul de corpuri reprezentat în figura 18.*

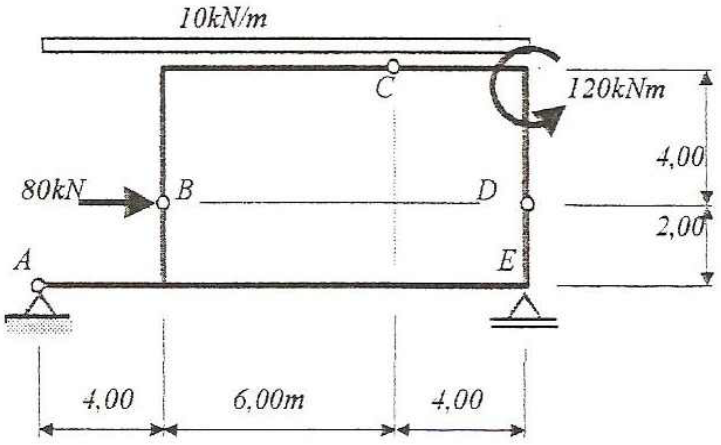


Fig.18.

Rezolvare. *Sistemul este static determinat fiind format din trei corpuri şi având patru articulaţii simple şi un reazem simplu, şi de asemenea fiind imobilizat deoarece corpul ABDE care este corp principal este fix iar partea formată din corpurile BC şi CD (parte secundară a sistemului) are două articulaţii fixe (în B şi D) şi o articulaţie intermediară între corpuri necoliniare.*

Schema de forţe se obţine înlocuind numai legăturile exterioare, fără a ne atinge de legăturile intermediare care se consideră blocate (solidificate). Se obţine schema de forţe ca şi când am avea un singur corp.

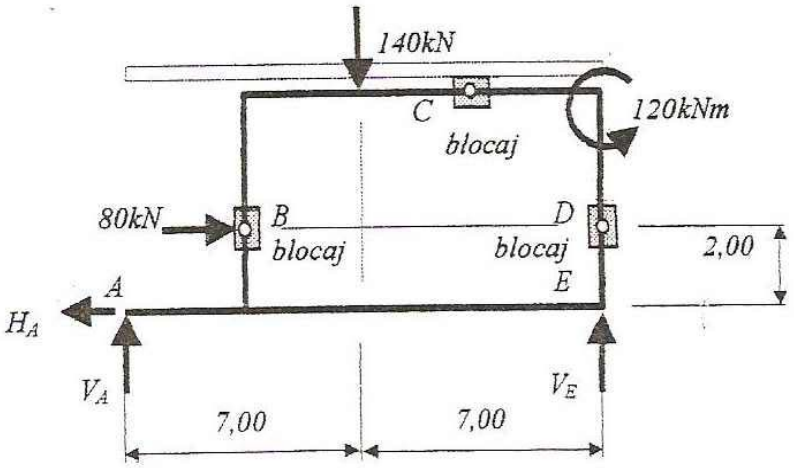


Fig.19.

Ecuaţiile de echilibru şi reacţiunile căutate vor fi:

$\Sigma X_i = 0$; $80 - H_A = 0$; $H_A = 80$ kN;
$\Sigma M_{Ai} = 0$; $-80 \cdot 2 - 140 \cdot 7 + 120 + V_E \cdot 14 = 0$; $V_E = 72{,}85$ kN;
$\Sigma M_{Ei} = 0$; $-V_A \cdot 14 - 80 \cdot 2 + 140 \cdot 7 + 120 = 0$; $V_A = 67{,}15$ kN

Verificarea se face cu ecuaţia:

$\Sigma Y_i = 0$; $V_A - 140 + V_E = 0$.

Problema 8. *Să se calculeze reacţiunile din legăturile exterioare pentru sistemul reprezentat în figura 20.*

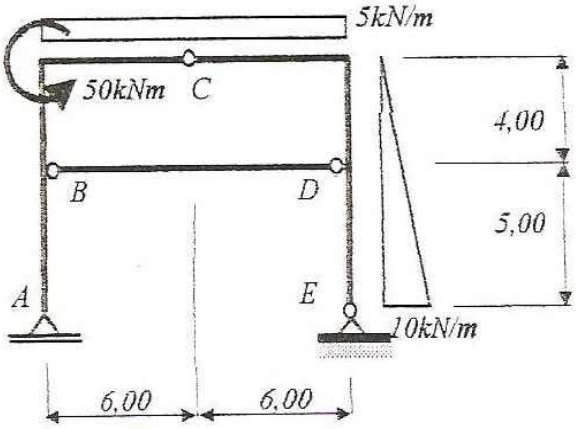


Fig.20.

6.9.Metoda mixtă.

Una din metodele cele mai eficiente pentru rezolvarea sistemelor de corpuri rigide este metoda mixtă care foloseşte simultan pentru determinarea reacţiunilor şi a forţelor de legătură ambele teoreme de echilibru. Această metodă permite rezolvarea complectă (determinarea tuturor necunoscutelor din legături) a oricărui sistem de corpuri.

Pentru sistemele de corpuri cu contururi deschise metoda poate fi folosită pentru calculul reacţiunilor din legăturile exterioare fără a mai desface sistemul în corpuri sau părţi.

Un ***sistem de corpuri cu contururi deschise*** *este acel sistem în care pentru a ajunge dintr-un punct , în acelaşi punct, trebuie să parcurgem un traseu de două ori, pe când la un sistem cu contururi închise se poate ajunge în acelaşi punct fără a parcurge de două ori acelaşi traseu.*

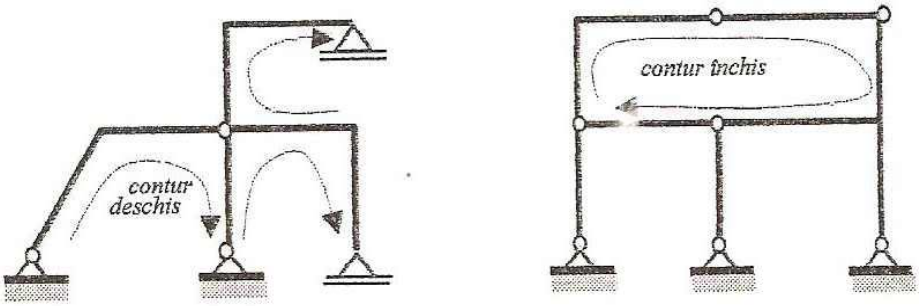


Fig.21.

Presupunând că legăturile intermediare sunt numai articulaţii intermediare, sistemele de corpuri cu contururi deschise au următoarele două proprietăţi:

1)Numărul de reacţiuni exterioare este întotdeauna:

$$N_{RE} = 3 + (N_C - 1)$$

unde N_{RE} este numărul de reacţiuni scalare din legăturile exterioare, iar N_C este numărul de corpuri din sistem.

Această proprietate se observă uşor dacă realizăm sistemul static determinat pornind de la un singur corp. Astfel pentru a imobiliza primul corp avem nevoie fie de trei reazeme simple, fie de o articulaţie şi un reazem simplu , fie de o încastrare. Deci primul corp va introduce întotdeauna numai 3 necunoscute exterioare. Următorul corp se

leagă de primul corp cu o articulaţie intermediară şi pentru imobilizare mai trebuie să adăugăm numai un reazem simplu. Următoarele corpuri, pentru a nu realiza contururi închise, se vor imobiliza ca şi cel de-al doilea corp, deci fiecare corp, după primul, va introduce numai câte o singură reacţiune exterioară. De aici rezultă relaţia prezentată.

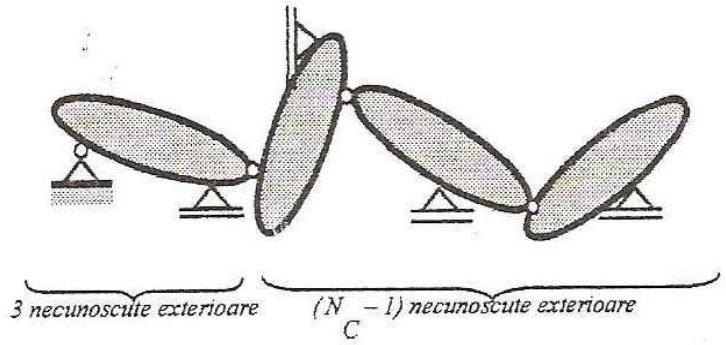


Fig.22.

Este evident faptul că legăturile exterioare pot fi grupate şi altfel şi chiar schimbate , dar echivalentul în necunoscute nu se modifică.

2)Numărul de articulaţii intermediare simple este întotdeauna:

$$N_{AIS} = N_C - 1$$

unde N_{AIS} este numărul de articulaţii intermediare simple. Şi această proprietate se poate observa uşor în figura 22.

Să presupunem acum un sistem de corpuri cu contururi deschise pentru care dorim să determinăm reacţiunile din legăturile exterioare. Folosind teorema solidificării se pot scrie trei ecuaţii de echilibru pentru întregul sistem fără a desface sistem în corpuri sau părţi. Cum numărul de necunoscute exterioare este mai mare decât trei, mai avem nevoie de (N_C – 1) ecuaţii pentru a rezolva problema. Aceste ecuaţii vor fi obţinute folosind teorema echilibrului părţilor. Adică se ia o parte (un subsistem) a sistemului şi se exprimă echilibrul acelei părţi (considerând partea ca şi când ar fi un singur corp). Se remarcă faptul că atunci când se separă partea aleasă de restul sistemului, articulaţia intermediară se înlocuieşte cu echivalentul mecanic , adică cu două forţe de legătură necunoscute. Este evident că în acest fel numărul de necunoscute care trebuie determinate creşte. Dar dacă exprimăm echilibrul acestei părţi numai cu o ecuaţie de moment în raport cu articulaţia intermediară, atunci

necunoscutele din articulația intermediară nu mai apar în ecuația de echilibru și deci numărul de necunoscute din ecuații nu crește.

Dar pentru această ecuație nu este necesar să desfacem sistemul în părți.

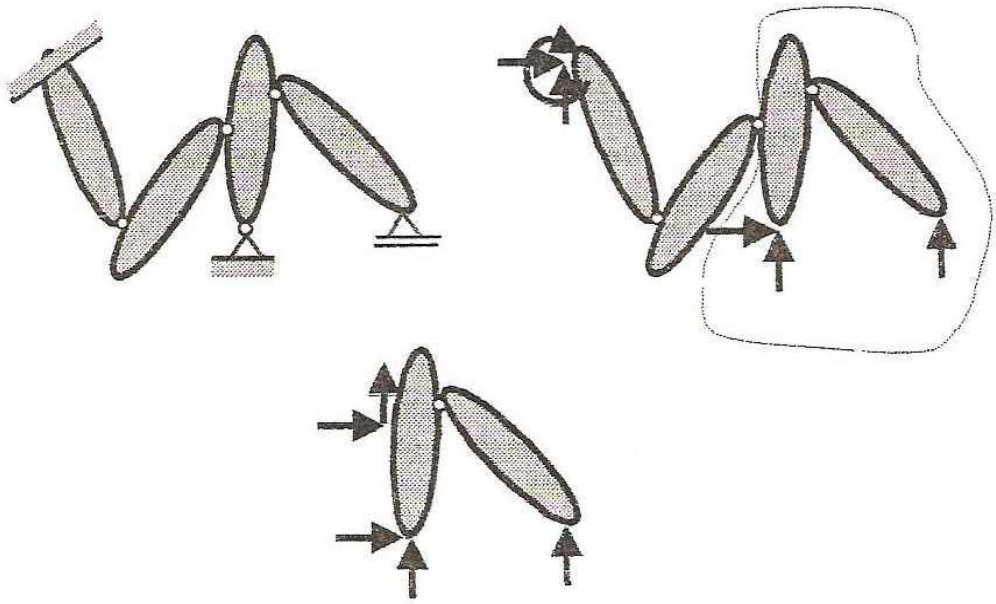


Fig.23.

Putem să observăm de asemenea că în aceeași articulație intermediară nu se pot scrie ecuații de moment pe ambele părți, deoarece suma celor două ecuații de echilibru pe cele două părți reprezintă o ecuație pe întregul sistem care evident nu va reprezenta o ecuație independentă față de cele trei ecuații deja scrise pentru întregul sistem.

Remarcând în continuare faptul că avem tot atâtea necunoscute suplimetare (în raport cu trei) câte articulații intermediare simple are sistemul, rezultă că de fapt vom scrie câte o singură ecuație de moment pentru o singură parte în raport cu fiecare articulație intermediară.

Dacă cele trei ecuații pe ansamblul sistemului reprezintă condiția ca sistemul să nu efectueze translații și nici rotații de corp rigid, atunci cele (N_C – 1) ecuații de moment în raport cu articulațiile intermediare reprezintă condițiile ca părțile respective să nu efectueze rotații relative în raport cu celelalte părți ale sistemului.

Metoda se va folosi în modul următor:

- *1)Se verifică mai întâi ca sistemul să fie static*

determinat, ocazie cu care se obțin și corpurile și părțile principale și secundare ale sistemului.

- *2)Se realizează schema statică de forțe pentru această metodă, conținând sistemul nedesfăcut în corpuri sau părți, încărcat cu reacțiunile din legăturile exterioare și încărcările aranjate ca și când sistemul s-ar desface în corpuri sau părți. Deci forțele distribuite vor fi concentrate pe fiecare corp separat;*
- *3)Se scriu trei ecuații de echilibru pentru întregul sistem ca și când ar fi un singur corp;*
- *4)Se scriu ($N_C - 1$) ecuații de moment în raport cu fiecare articulație intermediară simplă, pentru o singură parte a sistemului. Se va alege partea care conține corpurile sau părțile secundare ale sistemului;*
- *5)Se rezolvă sistemul de ecuații obținut începând rezolvarea de la ecuațiile pe corpurile sau părțile secundare;*
- *6)Se verifică rezultatele folosind o ecuație pe ansamblu.*

6.10. Exemplificare.

Problema 9. *Să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare pentru sistemul de corpuri reprezentat în figura 24.*

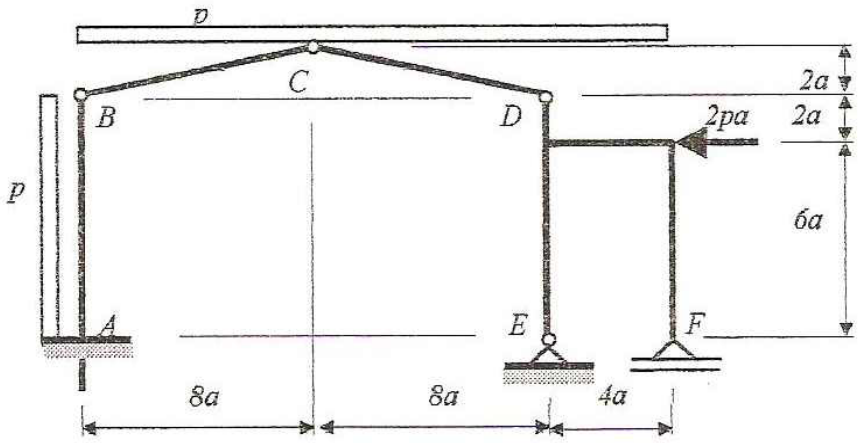


Fig.24.

Rezolvare. *Sistemul este format din patru corpuri și este static determinat pentru că are o încastrare, patru articulații și un reazem simplu:*

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1$$

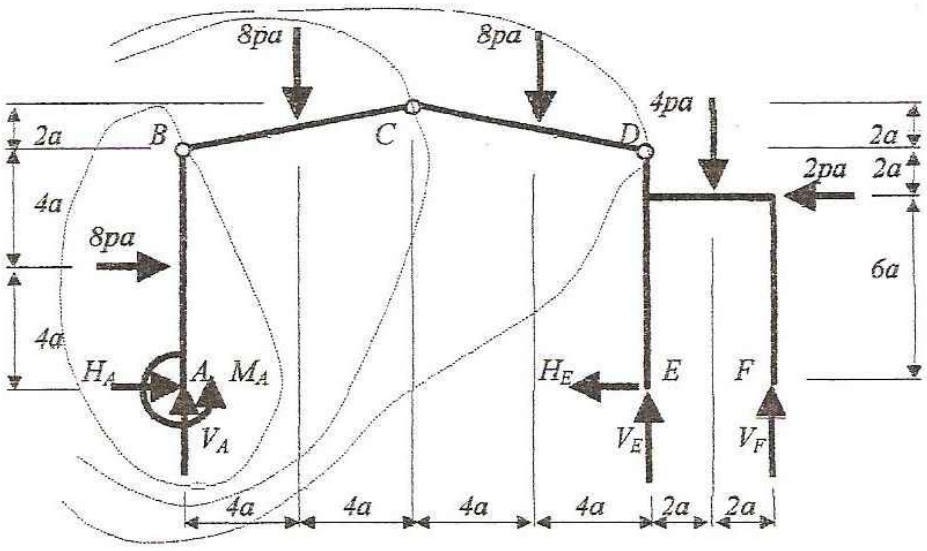


Fig.25.

și după ce constatăm că primul (AB) și ultimul (DEF) corp sunt fixe rezultă că și sistemul BCD, triplu articulat este o parte fixă. Observăm că avem două corpuri principale (primul și ultimul) și o parte secundară (cadrul triplu articulat).

Schema de forțe pentru această metodă este reprezentată în figura 25.

Ecuațiile de echilibru ale întregului sistem ca și când ar fi un singur corp sunt (în ipoteza că ultimul corp principal rezolvat va fi corpul DEF):

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ H_A + 8pa - 2pa - H_E = 0;$$
$$\Sigma M_{Ei} = 0\ ;\ M_A - V_A \cdot 16a - 8pa \cdot 4a + 8pa \cdot 12a + 8pa \cdot 4a - 4pa \cdot 2a + + 2pa \cdot 6a + V_F \cdot 4a = 0\ ;$$
$$\Sigma M_{Fi} = 0\ ;\ M_A - V_A \cdot 20a - 8pa \cdot 4a + 8pa \cdot 16a + 8pa \cdot 8a + 4pa \cdot 2a + + 2pa \cdot 6a - V_E \cdot 4a = 0\ ;$$

Vom scrie acum încă trei ecuații de echilibru pe părți și pentru că nu putem alege ecuațiile numai pentru partea secundară a sistemului vom alege toate trei ecuațiile pentru aceeași parte și anume partea care nu conține corpul principal propus să fie rezolvat ultimul, adică corpul DEF. Astfel vom alege în cele trei articulații intermediare momente pentru partea stângă:

$$\sum_{AB} M_{Bi} = \sum M^{st}_{Bi} = 0\ ;\ 8pa \cdot 4a + M_A + H_A \cdot 8a = 0\ ;$$
$$\sum_{ABC} M_{Ci} = \sum M^{st}_{Ci} = 0\ ;\ 8pa \cdot 4a + 8pa \cdot 6a + M_A + + H_A \cdot 10a - V_A \cdot 8a = 0\ ;$$
$$\sum_{ABCD} M_{Di} = \sum M^{st}_{Di} = 0\ ;\ 8pa \cdot 4a + 8pa \cdot 12a + 8pa \cdot 4a + M_A + + H_A \cdot 8a - V_A \cdot 16a = 0\ ;$$

Observăm că ultimele trei ecuații conțin aceleași trei necunoscute deci putem rezolva sistemul de trei ecuații obținut. Rezultă: valorile:

$V_A = 8pa$; $H_A = 8pa$; $M_A = -96pa^2$.

Înlocuind aceste valori în primele trei ecuații scrise pentru întregul sistem se vor obține și următoarele trei necunoscute:

$H_E = 14pa$; $V_E = -19pa$; $V_F = 31pa$.

Verificarea rezultatelor se va face prin ecuația de proiecție pe verticală pentru întregul sistem:

$\Sigma Y_i = 0$; $V_A - 8pa - 8pa + V_E - 4pa + V_F = 0$.

Problema 10. *Să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare pentru sistemul de corpuri din figura 26.*

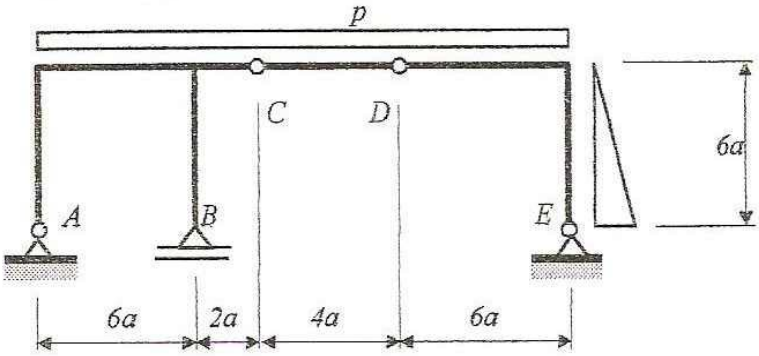


Fig.26.

6.11.Metoda echilibrului părților.

Metoda echilibrului părților este metoda de determinare a reacțiunilor și forțelor de legătură ale unui sistem de corpuri care folosește teorema echilibrului părților. Această metodă permite determinarea tuturor forțelor de legătură și reacțiunilor unui sistem indiferent de forma și particularitățile sistemului.

În esență metoda echilibrului părților este metoda generală de rezolvare a sistemelor de corpuri , astfel dacă prin părți se înțeleg corpurile sistemului atunci metoda este de fapt metoda echilibrului corpurilor componente, iar dacă printre părți se consideră și întregul sistem, atunci ea devine metoda mixtă.

În folosirea acestei metode trebuie avut în vedere ca ecuațiile scrise pentru părțile sistemului să fie independente și de asemenea în ecuații să intervină toate necunoscutele care apar în legăturile suprimate.

Metoda se foloseşte în modul următor:

- *1)Se verifică condiţia de static determinare a sistemului;*
- *2)Se desface sistemul de corpuri în părţile convenabile şi se încarcă fiecare parte cu reacţiunile şi forţele de legătură corespunzătoare legăturilor suprimate şi cu încărcările aranjate convenabil exprimării condiţiilor de echilibru;*
- *3)Se scriu ecuaţiile de echilibru corespunzătoare echilibrului fiecărei părţi având grijă ca numărul de ecuaţii independente să corespundă numărului de necunoscute introduse de legăturile suprimate ale sistemului;*
- *4)Se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinut folosind cunoştinţele privind părţile principale şi secundare ale sistemului;*
- *5)Se verifică rezolvarea corectă a sistemului de ecuaţii folosind o ecuaţie de echilibru nefolosită la rezolvare.*

În general această metodă este folosită la rezolvarea sistemelor cu contururi închise.

6.12.Exemplificare.

Problema 11. *Să se calculeze reacţiunile din legăturile exterioare pentru sistemul de corpuri din figura 27.*

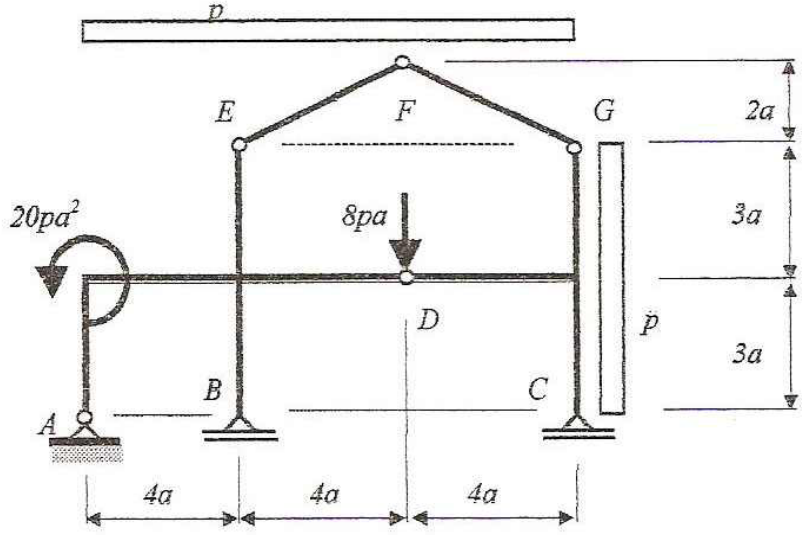


Fig.27.

Rezolvare. *Sistemul este static determinat fiind format din patru corpuri (ABDE , DCG , EF şi FG) şi având cinci articulaţii simple şi două reazeme simple. Pe de altă*

parte corpul ABED este fix deoarece are o articulație fixă și un reazem simplu, deci este corp principal și articulațiile intermediare din D și E devin fixe. Corpul DCG va deveni de asemenea un corp fixat fiindcă are articulație fixă în D și reazemul simplu C și împreună cu corpul ABDE formează o parte principală.

Cele două corpuri EF și FG împreună formează un cadru triplu articulat și deci imobilizat și reprezintă partea secundară a sistemului de corpuri.

Pentru că se cere numai determinarea reacțiunilor din legăturile exterioare, ideal ar fi folosirea metodei mixte în forma arătată anterior, dar pentru că sistemul prezintă un contur închis acest lucru nu este posibil de realizat, în consecință trebuie să desfacem sistemul în părți. În concluzie metoda echilibrului părților va fi cea mai judicioasă cale de determinare a reacțiunilor exterioare. Acest lucru este evident din faptul că avem patru reacțiuni exterioare iar numărul total de necunoscute este doisprezece. Dacă desfacem sistemul în două părți desfăcând două articulații intermediare se vor pune în evidență pe lângă cele patru necunoscute exterioare încă patru necunoscute din legăturile intermediare suprimate. Se vede acum că vom putea determina opt necunoscute în loc de doisprezece ca în metoda echilibrului corpurilor componente.

Sistemul se va desface astfel încât să putem rezolva cât mai ușor sistemul de ecuații obținut, adică vom desface în partea secundară care se poate rezolva independent de restul sistemului și partea principală care de asemenea se va rezolva cunoscând forțele de legătură de pe partea secundară.

Schema de forțe pentru partea secundară este reprezentată în figura 28.

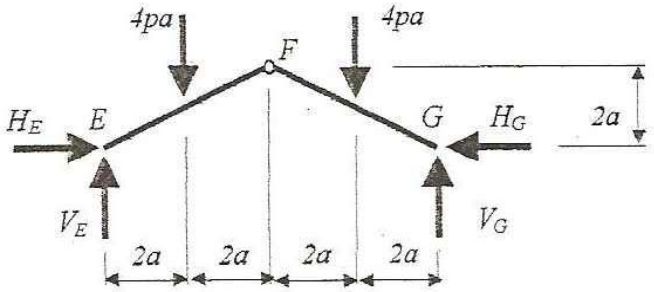


Fig.28.

Această parte este un sistem cu contururi deschise și deci pentru determinarea celor patru necunoscute se poate folosi procedeul de la metoda mixtă. Facem însă precizarea că ecuațiile pe ansamblul părții sunt de fapt ecuații pe părți ale sistemului întreg. Ecuațiile de echilibru vor fi: trei ecuații pe ansamblul sistemului și o ecuație de moment în raport cu articulația intermediară F pentru una din părțile sistemului:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; H_E - H_G = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Ei} = 0 \; ; \; -4pa \cdot 2a - 4pa \cdot 6a + V_G \cdot 8a = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Gi} = 0 \; ; \; -V_E \cdot 8a + 4pa \cdot 6a + 4pa \cdot 2a = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Fi}^{st} = 0 \; ; \; 4pa \cdot 2a + H_E \cdot 2a - V_E \cdot 4a = 0 \; .$$

Rezolvând sistemul de patru ecuații cu patru necunoscute se obțin valorile:

$$V_E = 4pa \; ; \; V_G = 4pa \; ; \; H_E = H_G = 4pa.$$

Verificarea acestor rezultate se face cu o ecuație de proiecție pe verticală:

$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; V_E - 4pa - 4pa + V_G = 0 \, .$$

Aceste forțe de legătură se vor considera încărcări pentru partea principală a cărei schemă de forțe este reprezentată în figura 29.

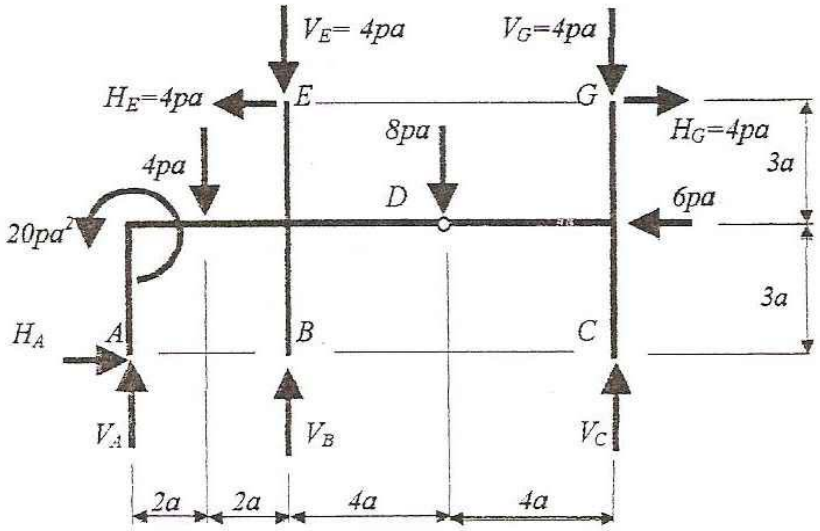


Fig.29.

Și această parte este un sistem cu contururi deschise și în consecință se poate aplica modul utilizat la metoda mixtă pentru a determina cele patru necunoscute, adică scriem trei ecuații pentru ansamblul părții și încă o ecuație de moment în articulația intermediară D pentru partea din dreapta deoarece această parte conține corpul secundar al ansamblului. Ecuațiile vor fi:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; H_A - 4pa + 4pa - 6pa = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0 \; ; \; 20pa^2 - 4pa \, . \, 2a + V_B \, . \, 4a - 4pa \, . \, 4a + 4pa \, . \, 6a - 4pa \, . \, 6a - 8pa \, . \, 8a - 4pa \, . \, 12a + 6pa \, . \, 3a + V_C \, . \, 12a = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Bi} = 0 \; ; \; -V_A \, . \, 4a + 20pa^2 + 4pa \, . \, 2a + 4pa \, . \, 6a - 4pa \, . \, 6a - 8pa \, . \, 4a - 4pa \, . \, 8a + 6pa \, . \, 3a + V_C \, . \, 8a = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_{Di}^{dr} = 0 \; ; \; V_C \, . \, 4a - 4pa \, . \, 3a - 4pa \, . \, 4a = 0 \, .$$

Rezolvând acest sistem de ecuații se vor obține reacțiunile căutate:

$$V_A = 7{,}5pa \; ; \; H_A = 6pa \; ; \; V_B = 7pa \; ; \; V_C = 5{,}5pa.$$

Verificarea rezultă din ecuația:

$$\Sigma Y_i = 0 \; ; \; V_A + V_B + V - 4pa - 4pa - 8pa - 4pa = 0 \, .$$

Problema 12. *Să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare pentru*

sistemului de corpuri din figura 30.

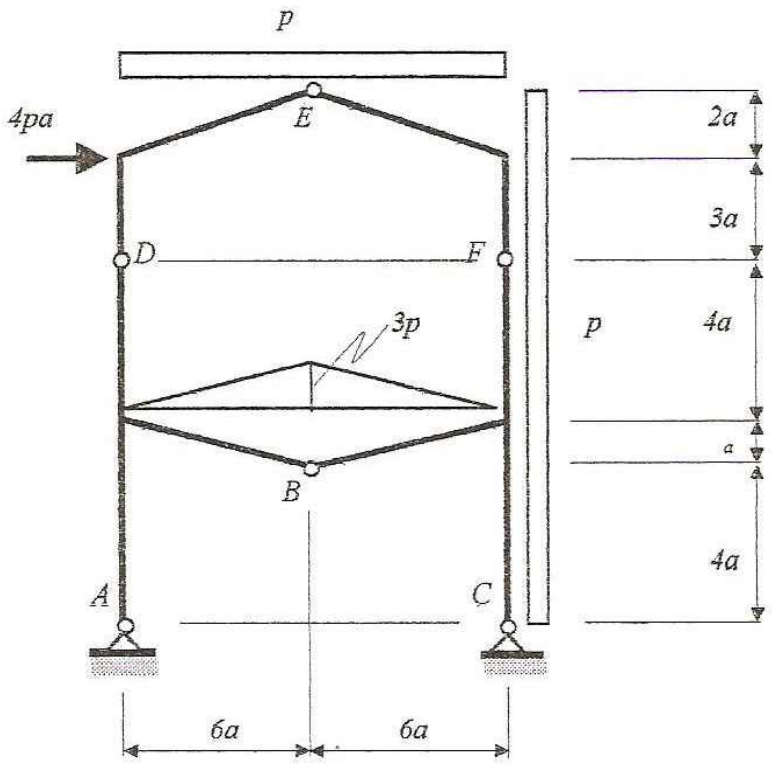


Fig.30.

6.13. Folosirea simetriei în rezolvarea sistemelor de corpuri.

O foarte mare parte din sistemele de corpuri sunt simetrice şi este de la sine înţeles că această proprietate poate fi folosită în rezolvarea lor (calculul reacţiunilor şi al forţelor de legătură din legăturile intermediare).

Vom spune că un sistem este simetric dacă prezintă simetrie de formă şi legături. În acest capitol , deşi cele prezentate vor fi adevărate şi în alte situaţii, din motive care vor rezulta din cunoştinţe ulterioare, vom trata numai sistemele simetrice care au articulaţii intermediare pe axa de simetrie.

Încărcările se vor clasifica în trei categorii şi anume: ***încărcări simetrice, încărcări antisimetrice şi încărcări oarecare.***

Încărcările simetrice sunt acele încărcări care se suprapun identic dacă se îndoaie sistemul pe axa de simetrie.

Încărcările antisimetrice sunt acele încărcări care se anulează identic prin îndoirea pe axa de simetrie.

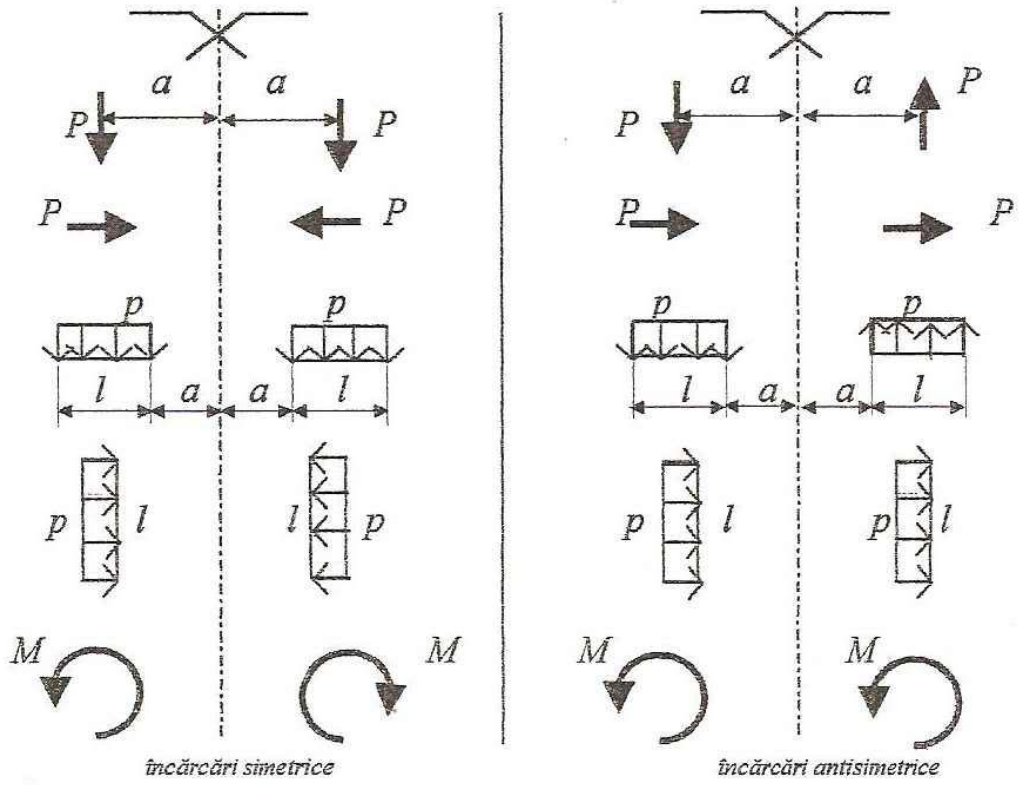


Fig.31.

Din condițiile elementare de echilibru rezultă că ***dacă un sistem simetric are o încărcare simetrică atunci şi reacțiunile din legături vor fi simetrice.*** *Această proprietate face ca pentru o astfel de situație să avem nevoie de jumătate din ecuațiile de echilibru necesare rezolvării sistemului.*

Asemănător se poate enunța că ***dacă un sistem simetric este încărcat cu o încărcare antisimetrică atunci şi reacțiunile sistemului vor rezulta antisimetrice.*** *Şi în acest caz problema necesită numai jumătate din ecuațiile pentru rezolvare.*

Dacă încărcarea este oarecare, aceasta se poate descompune întotdeauna în două componente: una simetrică şi una antisimetrică. Apoi folosind principiul suprapunerii efectelor se sumează reacțiunile şi forțele de legătură rezultate din încărcarea structurii, succesiv, cu cele două componente de încărcare. Modul de descompunere al încărcării este prezentat în figura 32.

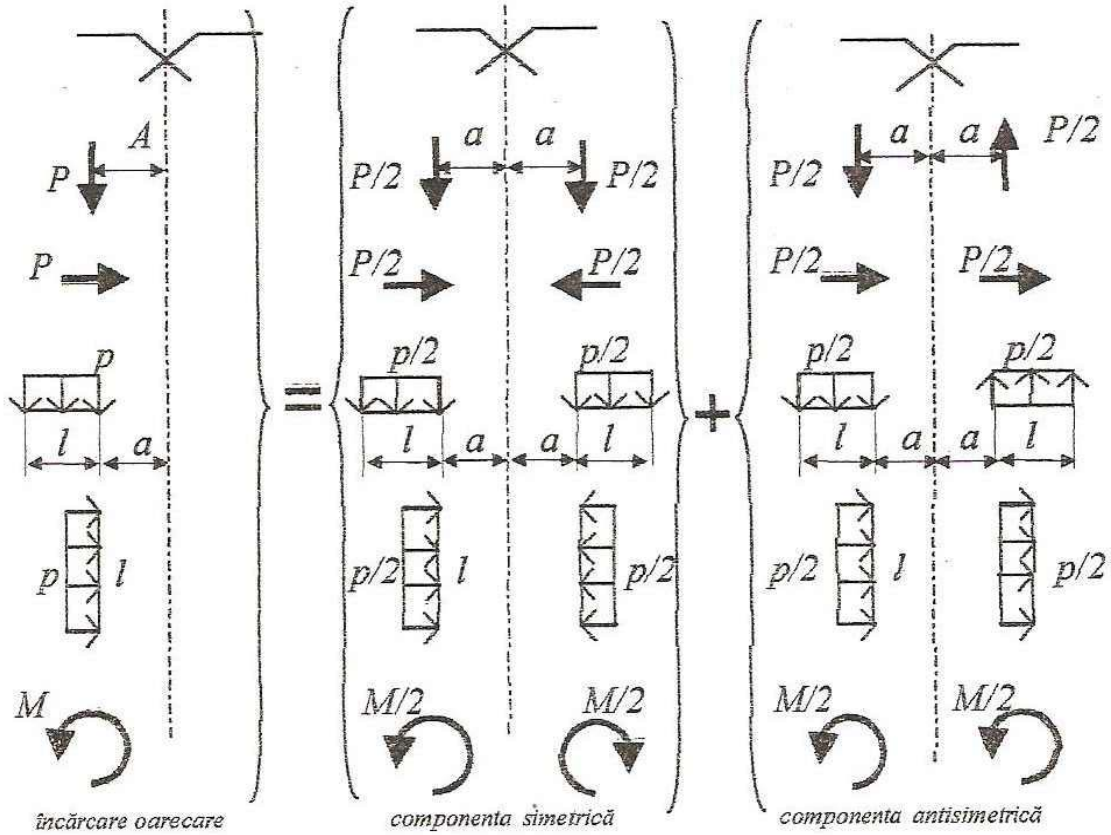


Fig.32.

Datorită simetriei sau antisimetriei încărcărilor şi a forţelor de legătură, calculul reacţiunilor şi al forţelor de legătură poate fi efectuat şi pe o jumătate de sistem (semistructură) având în vedere faptul că, aşa cum am arătat anterior ne ocupăm numai de sistemele care prezintă articulaţii intermediare pe axa de simetrie.

Pentru utilizarea semistructurilor trebuie avut în vedere faptul că dacă încărcarea este simetrică atunci articulaţia intermediară de pe axa de simetrie este echivalentă unei legături simple perpendiculare pe axa de simetrie. Acest lucru se observă din faptul că cealaltă componentă de reacţiune din articulaţia intermediară nu poate avea caracter simetric decât dacă se anulează. În consecinţă pe semistructură articulaţia intermediară se înlocuieşte cu un reazem simplu perpendicular pe axa de simetrie.

Dacă însă încărcarea este antisimetrică atunci articulaţia intermediară se comportă ca o legătură simplă intermediară coliniară cu axa de simetrie şi pentru semistructură se va înlocui cu un

reazem simplu coliniar cu axa de simetrie.

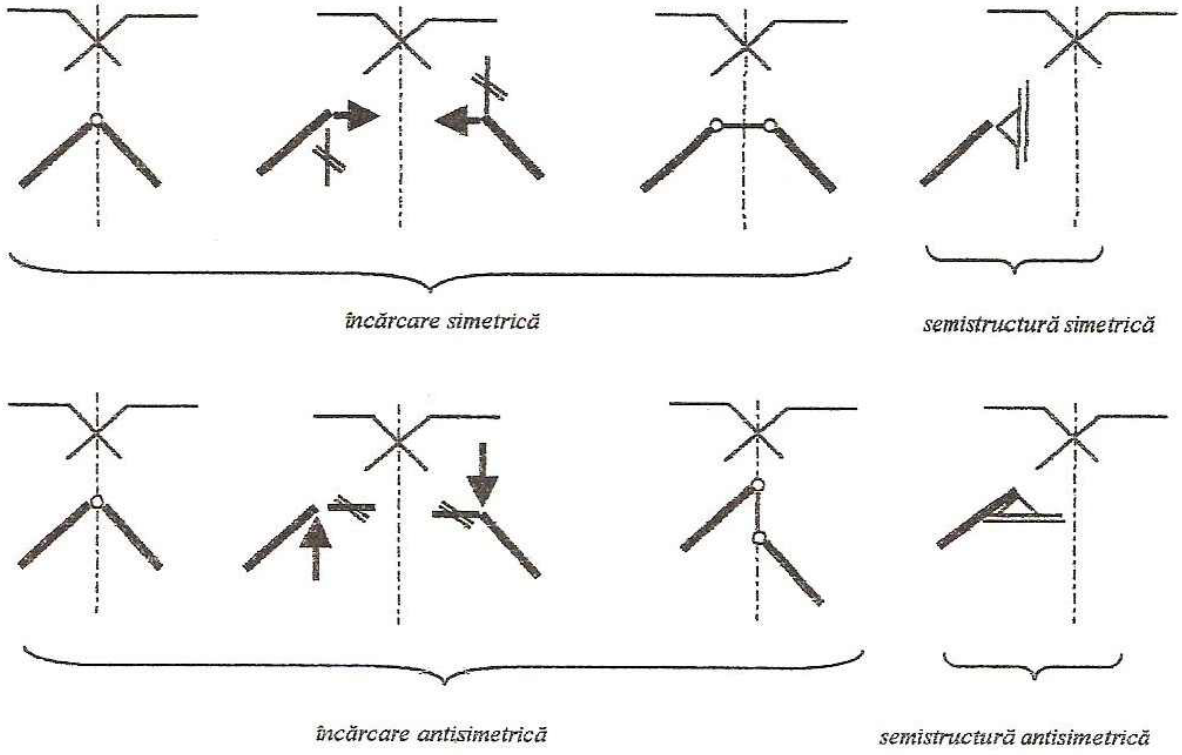


Fig.33.

6.14.Exemplificări.

Problema 13. *Folosind proprietățile simetriei sistemelor de corpuri să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare pentru sistemul reprezentat în figura 34.*

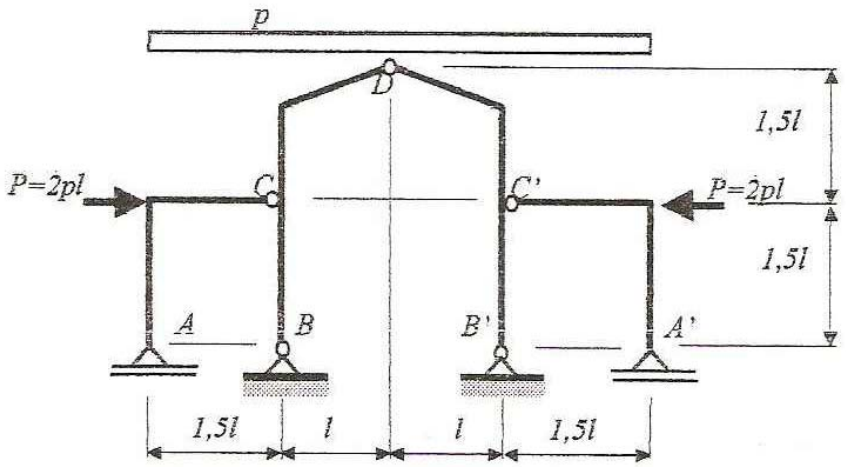


Fig.34.

Rezolvare. *Aşa cum se observă sistemul de corpuri este un sistem simetric având o încărcare simetrică. Acest lucru înseamnă că pentru rezolvare (determinarea celor şase necunoscute exterioare) vom putea scrie numai trei ecuaţii din care vor rezulta cele şase reacţiuni:*

$$V_A = V_{A'}\,;\; V_B = V_{B'}\,;\; H_B = H_{B'}$$

Dar aşa cum am prezentat anterior sistemul se poate rezolva considerând semistructura simetrică (având un reazem simplu orizontal în punctul D).

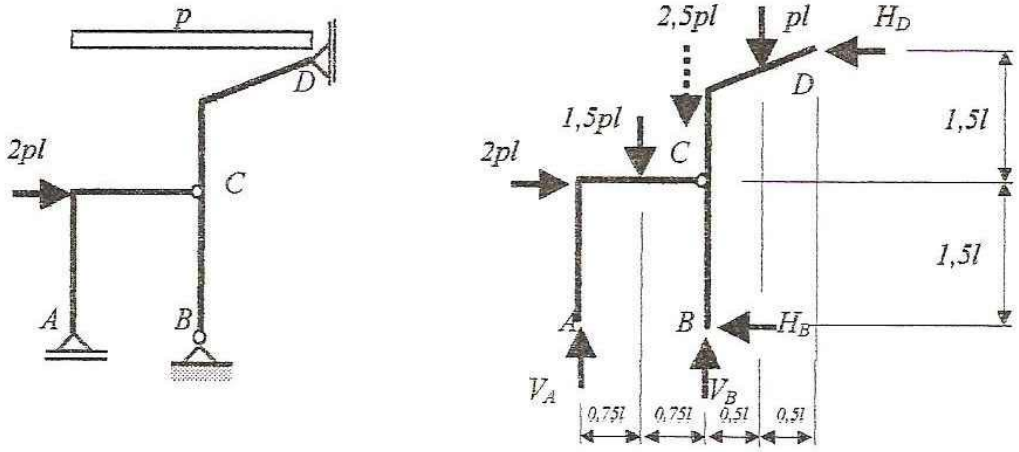


Fig.35.

Schema de forţe pentru această semistructură este a unui sistem cu contururi deschise deci se pot determina reacţiunile din legăturile exterioare (ale semistructurii) folosind metoda mixtă. Cum corpul AC este corp secundar vom scrie mai întâi o ecuaţie pe această parte:

$$\Sigma M_{Ci}^{st} = 0\,;\; 1{,}5pl \cdot 0{,}75l - V_A \cdot 1{,}5l = 0\,; \longrightarrow V_A = 0{,}75pl;$$

Pentru ecuaţiile pe ansamblu putem scrie:

$$\Sigma Y_i = 0\,;\; V_A + V_B - 2{,}5pl = 0\,; \longrightarrow V_B = 1{,}75pl;$$
$$\Sigma M_{Di} = 0\,;\; -V_A \cdot 2{,}5l - V_B \cdot l - H_B \cdot 3l + 2pl \cdot 1{,}5l + 2{,}5pl \cdot 1{,}25l = 0$$
$$\longrightarrow H_B = 0{,}833pl.$$

După cum se observă reacţiunile căutate pot fi determinate fără a mai scrie toate ecuaţiile pe ansamblu, dar determinarea reacţiunii din D face posibilă verificarea calculelor. Astfel scriind cea de-a treia ecuaţie pe ansamblu vom găsi:

$$\Sigma M_{Bi} = 0\,;\; -V_A \cdot 1{,}5l + H_D \cdot 3l - 2pl \cdot 1{,}5l + 2{,}5pl \cdot 0{,}25l = 0$$
$$\longrightarrow H_D = 1{,}16pl.$$

De asemenea se poate vedea că pentru ecuaţiile pe ansamblu am folosit rezultanta întreagă a forţei distribuite şi nu cele două rezultante acţionând pe cele două corpuri.

Verificarea se va efectua cu ecuația:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; 2pl - H_B - H_D = 0 \, .$$

Problema 14. *Pentru sistemul din figura 36. să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare.*

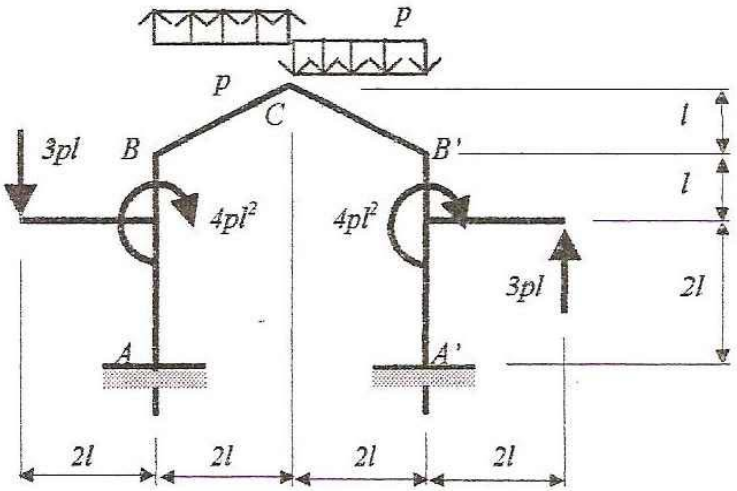


Fig.36.

Rezolvare. *Sistemul este static determinat și simetric având o încărcare antisimetrică. Va rezulta că reacțiunile căutate vor fi de asemenea antisimetrice. Concluzia este că pentru determinarea celor șase reacțiuni necunoscute este suficient să scriem numai trei ecuații de echilibru. Aceste ecuații, dacă se scriu pentru sistemul nedesfăcut trebuie alese în așa fel încât să conțină toate necunoscutele. De exemplu ecuația de proiecție pe verticală nu este independentă și nu conține necunoscute dacă se acceptă că* $V_A = - V_{A'}$ *(condiția de antisimetrie a reacțiunilor).*

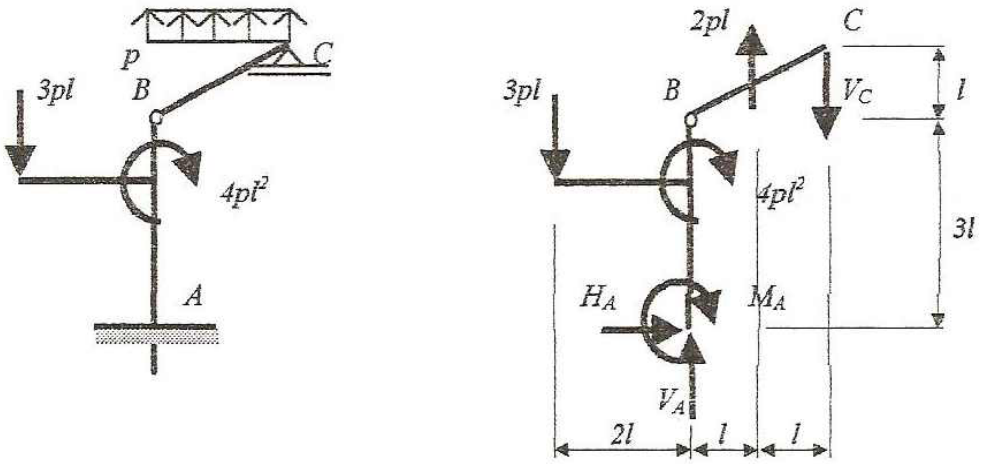


Fig.37.

Însă se poate considera semistructura antisimetrică având un reazem

simplu vertical în locul articulației din C și rezolva această semistructură. Schema de forțe este reprezentată în figura 37. Pentru că această semistructură este un sistem cu contururi deschise, pentru rezolvare se poate folosi și metoda mixtă, iar dacă vrem să determinăm numai reacțiunile din A putem alege ecuațiile astfel încât să rezulta numai aceste necunoscute. Totuși pentru a verifica rezultatele vom rezolva complet sistemul care are corpul BC secundar. Ecuațiile de echilibru scrise astfel încât să rezulta fiecare necunoscută din câte o ecuație, sunt:

$$\Sigma M_{Bi}^{dr} = 0 \; ; 2pl \cdot l - V_C \cdot 2l = 0; \longrightarrow V_C = pl;$$
$$\Sigma X_i = 0 \; ; H_A = 0 \; ; \longrightarrow H_A = 0 \; ;$$
$$\Sigma Y_i = 0 \; ; -3pl + V_A + 2pl - V_C = 0 \; ; \longrightarrow V_A = 2pl;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0 \; ; \; 3pl \cdot 2l - 4pl^2 - M_A + 2pl \cdot l - V_C \cdot 2l = 0 \; ; \longrightarrow M_A = 2pl^2.$$

Verificarea se face cu ecuația:

$$\Sigma M_{Ci} = 0 \; ; \; 3pl \cdot 4l - 4pl^2 - M_A + 2pl \cdot l - V_C \cdot 2l + H_A \cdot 4l = 0$$

Problema 15. *Să se calculeze reacțiunile din legăturile exterioare, folosind proprietățile simetriei structurii, pentru cadrul din figura 38.*

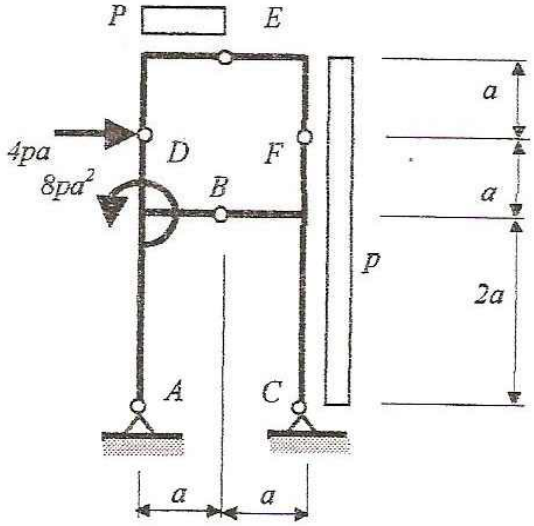


Fig.38.

Rezolvare. *Observăm că sistemul este simetric dar încărcarea este oarecare, în consecință pentru a folosi proprietatea simetriei sistemului trebui ca încărcarea să fie descompusă în cele două componente: simetrică și antisimetrică.*

Schema de descompunere este prezentată în figura 39. Pentru rezolvarea sistemului acționat de cele două tipuri de încărcări, datorită faptului că avem de-a face cu un sistem cu contur închis trebuie să desfacem sistemul. În loc să desfacem sistemul în parte principală și secundară, așa cum am prezentat mai înainte, aici vom prefera să lucrăm pe semistructură. Cele două semistructuri corespunzătoare celor două încărcări sunt prezentate în figura 40.

Rezolvarea semistructurii simetrice se efectuează ca pentru orice sistem cu contururi deschise:

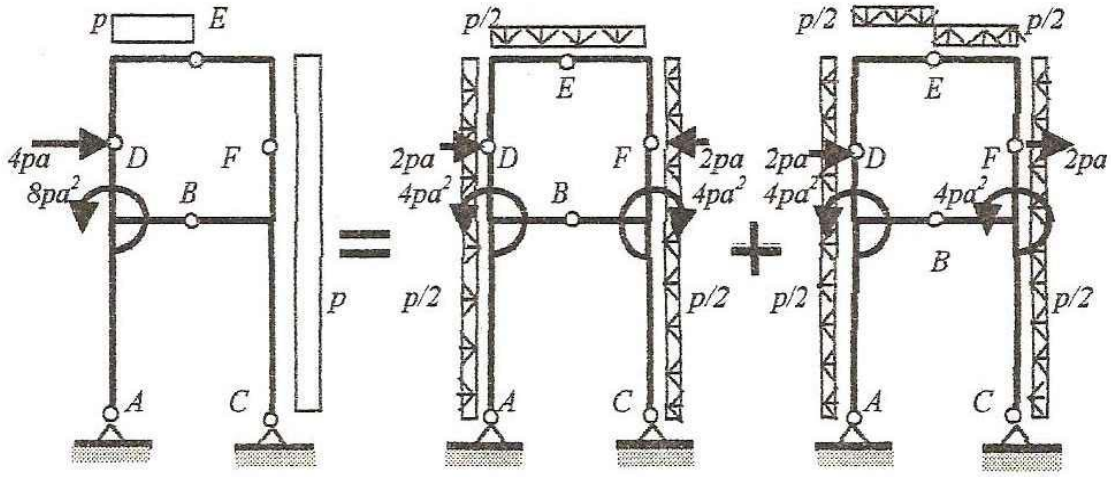


Fig.39.

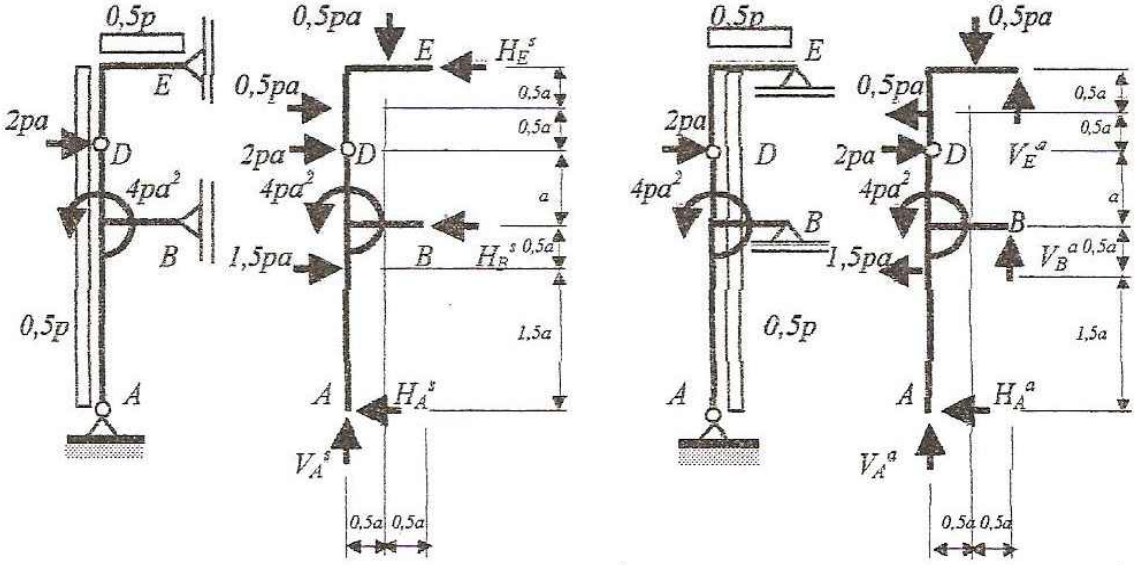


Fig.40.

$\Sigma M_{Di}^{DE} = 0$; $H_E^s \cdot a - 0{,}5pa \cdot 0{,}5a - 0{,}5pa \cdot 0{,}5a = 0$; $\longrightarrow H_E^s = 0{,}5pa$;

$\Sigma Y_i = 0$; $V_A^s - 0{,}5pa = 0$; $\longrightarrow V_A^s = 0{,}5pa$;

$\Sigma M_{Ai} = 0$; $-1{,}5pa \cdot 1{,}5a + 4pa^2 + H_B^s \cdot 2a - 2pa \cdot 3a - 0{,}5pa \cdot 3{,}5a -$
$- 0{,}5pa \cdot 0{,}5a + H_E^s \cdot 4a = 0$; $\longrightarrow H_B^s = 2{,}125pa$;

$\Sigma M_{Bi} = 0$; $-V_A^s \cdot a - H_A^s \cdot 2a + 1{,}5pa \cdot 0{,}5a + 4pa^2 - 2pa \cdot a -$
$- 0{,}5pa \cdot 1{,}5a + 0{,}5pa \cdot 0{,}5a + H_E^s \cdot 2a = 0$ $\longrightarrow H_A^s = 1{,}375pa$

Verificarea se va efectua cu ecuația:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ -H_E^s + 0{,}5pa + 2pa - H_B^s + 1{,}5pa - H_A^s = 0\ .$$

Pentru semistructura antisimetrică vom scrie următoarele ecuații de echilibru (ca pentru orice sistem cu contururi deschise):

$$\Sigma M_{Di}^{DE} = 0\ ;\ V_E^a \cdot a - 0{,}5pa \cdot 0{,}5a + 0{,}5pa \cdot 0{,}5a = 0\ ; \qquad V_E^a = 0;$$
$$\Sigma X_i = 0\ ;\ -0{,}5pa + 2pa - 1{,}5pa - H_A^a = 0\ ; \longrightarrow H_A^a = 0;$$
$$\Sigma M_{Ai} = 0\ ;\ V_E^a \cdot a + V_B^a \cdot a - 0{,}5pa \cdot 0{,}5a + 0{,}5pa \cdot 3{,}5a - 2pa \cdot 3a + 4pa^2 + 1{,}5pa \cdot 1{,}5a = 0\ ; \longrightarrow V_B^a = -1{,}75pa;$$
$$\Sigma M_{Bi} = 0\ ;\ -V_A^a \cdot a - H_A^a \cdot 2a - 1{,}5pa \cdot 0{,}5a + 4pa^2 - 2pa \cdot a + 0{,}5pa \cdot 1{,}5a + 0{,}5pa \cdot 0{,}5a = 0 \longrightarrow V_A^a = 2{,}25pa$$

Verificarea se efectuează scriind ecuația:

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ V_A^a + V_B^a + V_E^a - 0{,}5pa = 0.$$

Reacțiunile finale ale sistemului se obțin însumând reacțiunile găsite pentru cele două componente de încărcare:

$$V_A = V_A^s + V_A^a = 2{,}75pa\ ;\ H_A = H_A^s + H_A^a = 1{,}375pa;$$
$$V_C = V_C^s - V_C^a = -1{,}75pa\ ;\ H_C = H_C^s - H_C^a = 1{,}375pa.$$

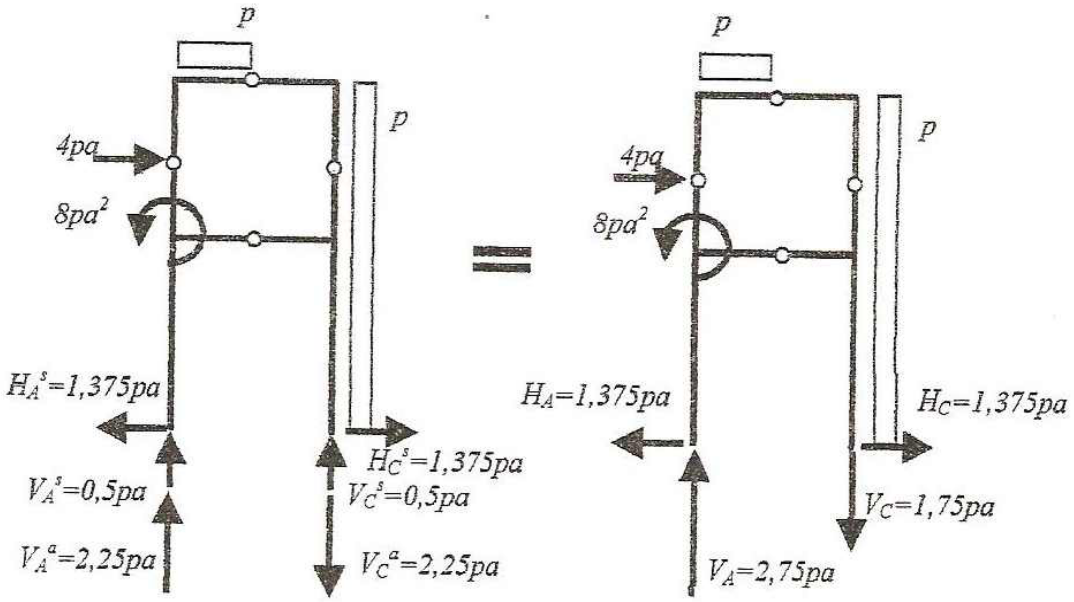


Fig.41.

Problemele 16, 17, 18. *Să se calculeze, folosind proprietățile simetriei, reacțiunile din legăturile exterioare pentru sistemele de corpuri simetrice reprezentate în figurile 42, 43 și 44.*

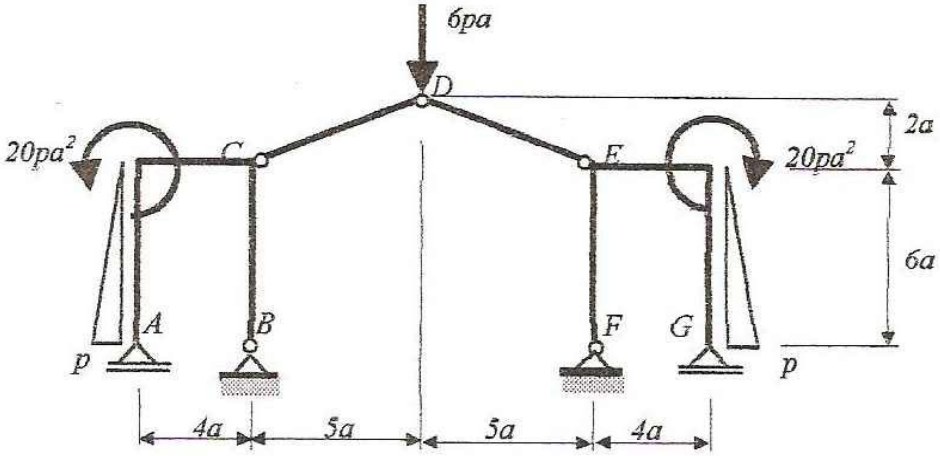


Fig.42.

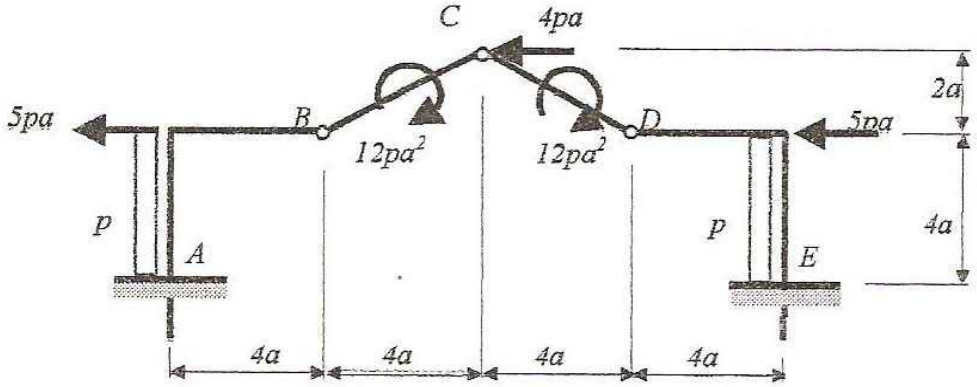


Fig.43.

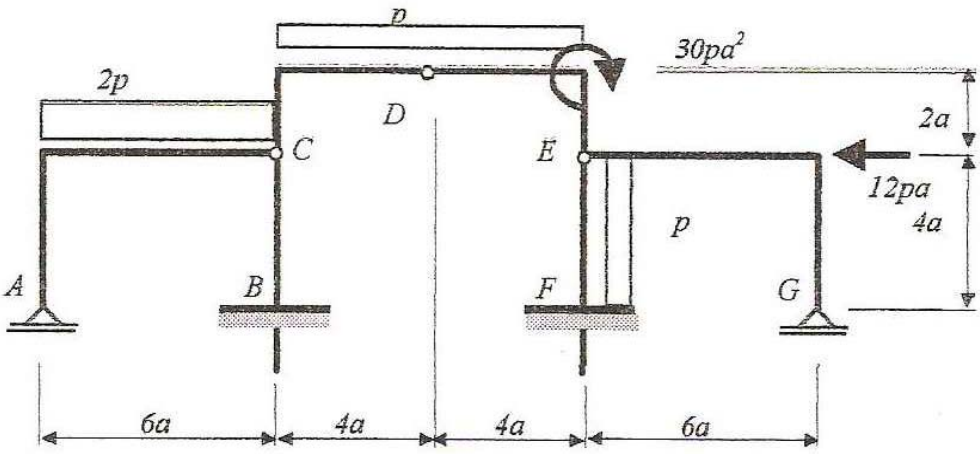


Fig.44.

Capitolul 7.Grinzi cu zăbrele plane.

7.1.Introducere.

Grinzile cu zăbrele reprezintă în practica inginerească una din structurile cele mai des folosite deoarece răspunde la două probleme ridicate în general de o structură: o problemă practică, inginerească de alcătuire şi rezistenţă şi a doua de economie de material în realizarea structurii.

Grinda cu zăbrele este un sistem particular de corpuri în care corpurile sunt numai bare drepte, articulate la capete şi având ca legături exterioare numai reazeme simple şi articulate. În general barele care alcătuiesc o grindă cu zăbrele se numesc ***zăbrele****, de unde şi numele sistemului, iar articulaţiile se numesc* ***noduri****.*

Grinzile cu zăbrele pot fi clasificate după diferite criterii şi pot avea diferite forme.

1)După numărul de necunoscute introduse de legăturile sistemului, grinzile cu zăbrele se împart în: ***grinzi cu zăbrele static determinate*** *şi* ***grinzi cu zăbrele static nedeterminate****. Grinzile static determinate sunt acele sisteme la care numărul de necunoscute scalare din legături este egal cu numărul ecuaţiilor scalare independente posibile de scris pentru exprimarea echilibrului;*

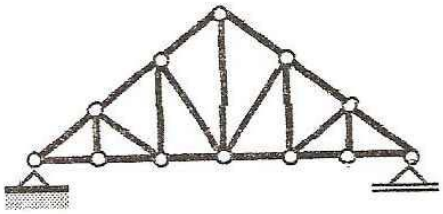
2)După configuraţia sistemului avem: ***grinzi cu zăbrele spaţiale*** *şi* ***grinzi cu zăbrele plane****. Grinzile cu zăbrele plane sunt acele grinzi la care configuraţia sistemului este în plan şi acţiunile exercitate asupra sistemului sunt în acelaşi plan;*

3)După modul de alcătuire se disting: ***grinzi cu zăbrele simple, grinzi cu zăbrele compuse*** *şi* ***grinzi cu zăbrele complexe****. Grinzile simple, printr-o definiţie simplificată, sunt acele sisteme care se obţin prin*

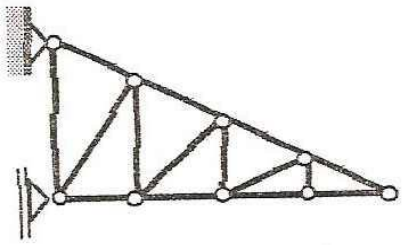
alăturare de triunghiuri. Grinzile compuse se obțin prin suprapunerea sau combinația grinzilor simple, iar grinzile cu zăbrele complexe (tot într-o definiție simplificată) se obțin și prin suprapunerea de triunghiuri.

Dintre toate aceste tipuri de grinzi cu zăbrele, în acest capitol vom studia numai grinzile cu zăbrele plane static determinate simple.

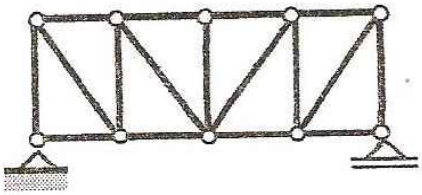
Formele grinzilor cu zăbrele sunt diverse, dar cele mai des folosite sunt: grinzile cu zăbrele triunghiulare, dreptunghiulare sau cu tălpi paralele, poligonale sau lenticulare.



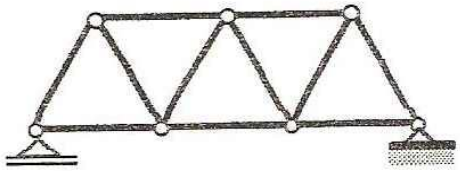
grindă cu zăbrele triunghiulară



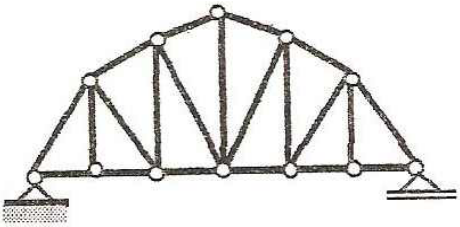
grindă cu zăbrele triunghiulară



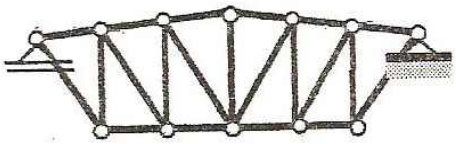
grindă cu zăbrele dreptunghiulară



grindă cu zăbrele cu tălpi paralele



grindă cu zăbrele poligonală



grindă cu zăbrele lenticulară

Fig.1.

Precum se poate vedea toate grinzile cu zăbrele reprezentate în figura 1. sunt grinzi cu zăbrele simple.

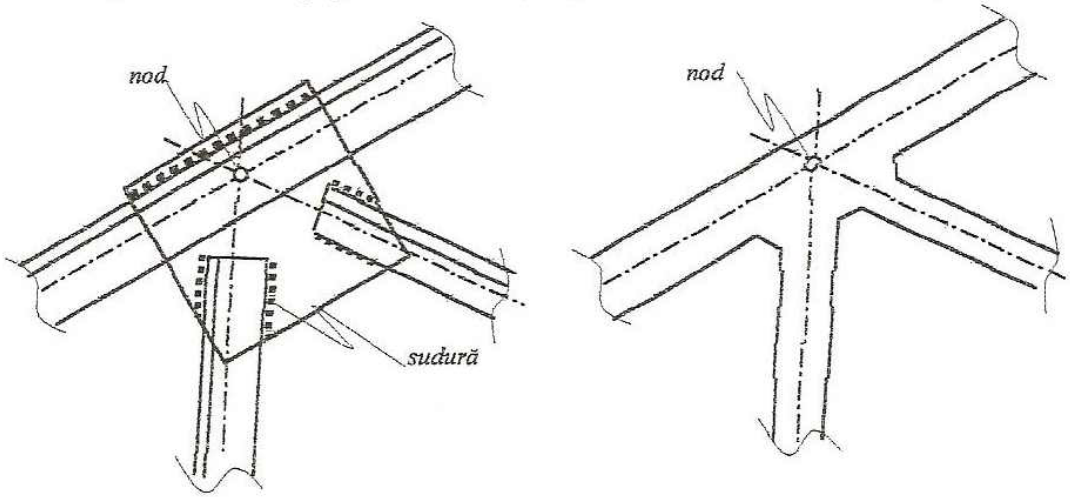
Fiind un sistem de corpuri, exprimarea echilibrului se poate face în același mod ca pentru orice alt sistem, adică folosind metodele prezentate. Dar cum poate fi remarcat pe exemplele prezentate în

figura 1. exprimarea echilibrului grinzii cu zăbrele, ca sistem de corpuri, duce la obținerea unui sistem cu foarte multe ecuații. Chiar dacă aceste ecuații sunt în general simple totuși volumul mare de calcul face necesară fie folosirea calculului automat, fie o simplificare a calculului astfel încât studiul echilibrului să nu producă sisteme de ecuații deosebit de mari. Pentru aceasta se consideră o serie de ipoteze simplificatoare care deși vor duce la rezultate aproximative în raport cu situația reală a structurii, totuși permite calculul ușor al acestor tipuri de sisteme de corpuri și care duc la rezultate acceptabile.

7.2.Ipoteze simplificatoare.

Ipotezele simplificatoare considerate în general la grinzile cu zăbrele sunt următoarele:

- *1)Barele grinzii sunt drepte. Această ipoteză de obicei este respectată;*
- *2)Barele au secțiunea neglijabilă în raport cu lungimea, sunt axate în noduri care sunt articulații. În realitate această ipoteză nu este pe deplin îndeplinită deoarece deși au secțiunea mică în raport cu lungimea și sunt axate în noduri (axele tuturor barelor care vin într-un nod se intersectează în același punct), nodurile nu reprezintă articulații ci încastrări, deoarece în noduri se realizează fie suduri (pentru grinzile metalice), fie se realizează prinderi cu un număr mare de nituri sau buloane, sau sunt de fapt continue (la grinzile din beton armat).*



nod de grindă metalică *nod de grindă de beton armat*

Fig.2.

Aşa cum se poate vedea din exemplele prezentate, această ipoteză se abate mult de la realitate dar cu toate acestea, de obicei, această ipoteză este acoperitoare;

3)Încărcările exterioare sunt numai forţe concentrate şi se aplică numai în noduri. Această ipoteză poate fi îndeplinită pentru încărcările utile (cele pentru care se realizează structura) prin procedeul transmiterii indirecte a sarcinilor, dar nu şi pentru încărcarea din greutatea proprie a structurii (greutatea barelor) care acţionează distribuit în lungul fiecărei bare. Cu toate acestea, dacă greutăţile barelor nu pot fi neglijate, ele se vor considera ca forţe concentrate în nodurile adiacente barelor respective (de exemplu jumătatea greutăţii unei bare se va considera acţionând în nodul dintr-un capăt şi cealaltă jumătate în nodul din celălalt capăt al barei).

Facem precizarea că şi legăturile exterioare se consideră aşezate numai în noduri.

*În aceste condiţii să considerăm o bară oarecare din grindă, situată între nodurile **i** şi **j**.*

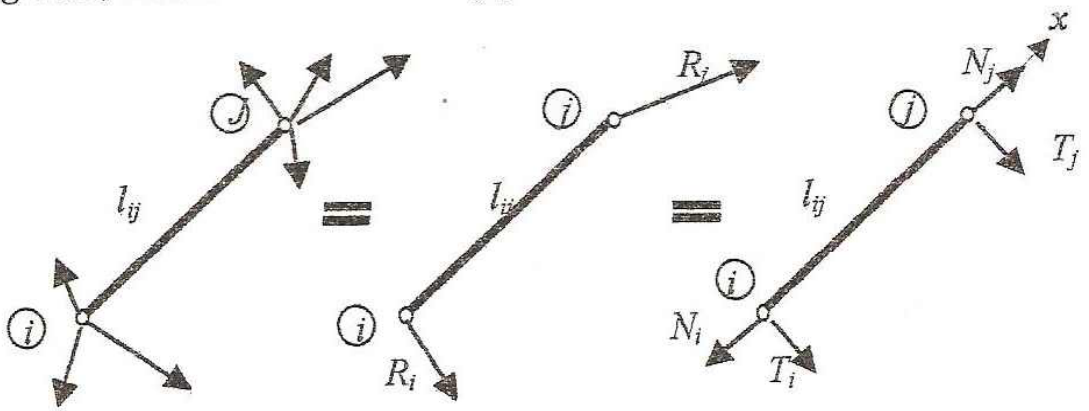


Fig.3.

Toate forţele, cele date şi de legătură, vor avea punctele de aplicaţie în cele două noduri. Fiind forţe concurente se pot înlocui cu rezultantele lor acţionând tot în acele puncte. Descompunem cele două rezultante R_i şi R_j în două componente: una pe direcţia barei şi alta pe direcţie normală la bară, notate respectiv cu N_i şi N_j şi încă T_i şi T_j.

*Dacă punem problema echilibrului sistemului, în baza proprietăţii enunţate la sistemele de corpuri (pentru ca sistemul să fie în echilibru , fiecare corp al sistemului trebuie să fie în echilibru) şi bara **ij** trebuie să fie în echilibru. Condiţiile de echilibru se pot scrie:*

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \; N_i = N_j \; ;$$
$$\Sigma M_i = 0 \; ; \; T_j \cdot l_{ij} = 0 \; ; \; \longrightarrow T_j = 0 \; ;$$
$$\Sigma M_j = 0 \; ; \; T_i \cdot l_{ij} = 0 \; ; \; \longrightarrow T_i = 0 \; ;$$

Din cele trei ecuații rezultă că ***barele grinzii cu zăbrele sunt supuse la forțe axiale.*** *Vom nota aceste forțe axiale :*

$$N_i = N_j = N_{ij}$$

adică fiecare bară este solicitată de o singură forță axială, necunoscută ca mărime și ca sens.

Acest lucru face ca sistemul de corpuri, grinda cu zăbrele, în care barele sunt corpurile iar nodurile sunt legăturile, să poată fi privită din alt punct de vedere. Observăm că toate forțele , și cele date și cele de legătură, acționează asupra nodurilor, deci putem să considerăm că de fapt nodurile reprezintă suportul material as acestui sistem. Evident nodurile vor reprezenta ***puncte materiale.*** *Pe de altă parte, barele, care sunt de fapt niște penduli (bare articulate la capete și neîncărcate) sunt supuse fiecare la câte o singură forță (efort axial) necunoscută, deci pot fi considerate ca fiind* ***legături simple intermediare.*** *În consecință, grinda cu zăbrele se poate considera, în baza ipotezelor simplificatoare, ca fiind un sistem de puncte materiale legate între ele cu legături simple.*

Acest mod de a privi o grindă cu zăbrele permite elaborarea unor metode specifice acestor tipuri de sisteme, metode care permit determinarea atât a reacțiunilor din legăturile exterioare cât și a eforturilor din barele grinzii.

7.3.Notații, denumiri, convenții de semn și sens.

Privitor la sensul efortului axial, în rezistența materialelor se convine ca dacă bara este întinsă, adică efortul este de tensiune, atunci efortul să fie considerat pozitiv, iar dacă bara este comprimată atunci efortul să fie considerat negativ.

Presupunând o bară dintre două noduri, separată de acestea, se observă că dacă bara este întinsă atunci efortul iese din nod (trage de nod) , iar dacă bara este comprimată atunci efortul intră în nod

(apasă nodul).

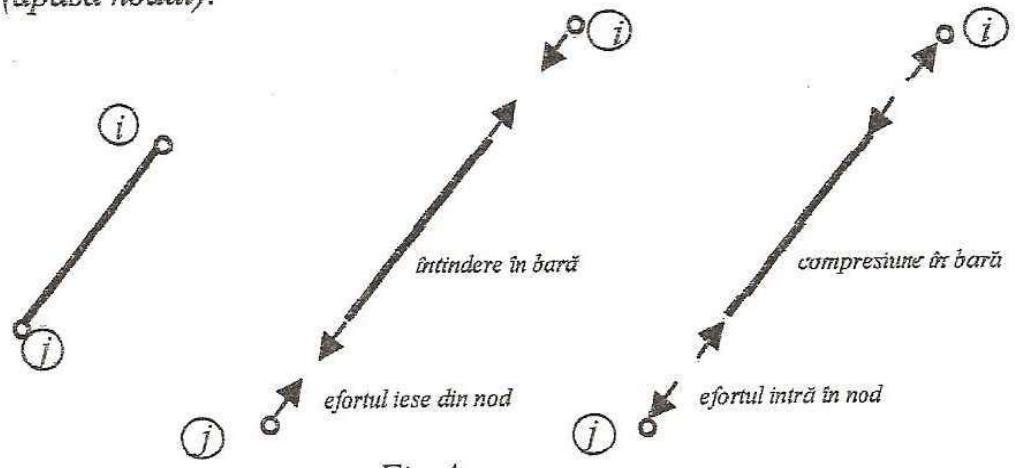


Fig.4.

O grindă cu zăbrele simplă (dezvoltată pe orizontală) are următoarele componente şi cu următoarele denumiri:

-barele care mărginesc la partea superioară grinda formează ***talpa superioară;***

-barele care mărginesc grinda la partea inferioară formează ***talpa inferioară;***

-barele înclinate se numesc ***diagonale;***

-barele verticale care leagă tălpile se numesc ***montanţi;***

-distanţa dintre cele două reazeme se numeşte ***deschidere;***

-spaţiul dintre două rânduri de noduri se numeşte ***panou.***

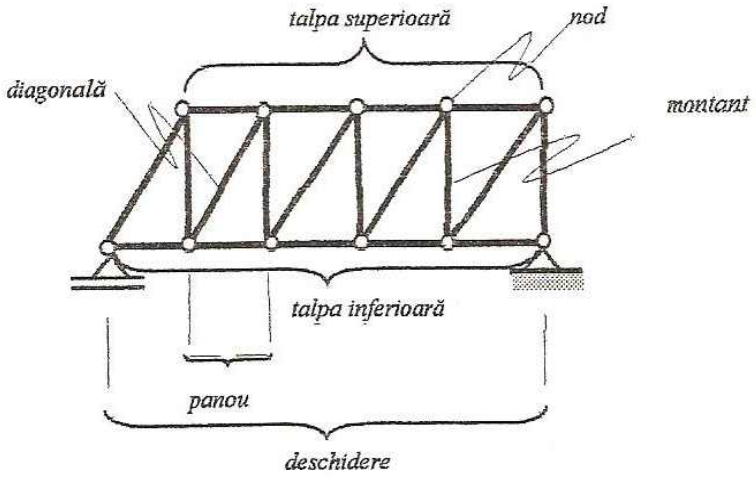


Fig.5.

7.4.Condiția de determinare statică.

Verificarea posibilității de rezolvare a unui sistem este verificarea condiției de determinare statică. Această condiție, așa cum am văzut în cazul sistemelor de corpuri, are două aspecte: aspectul cantitativ, adică verificarea condiției ca numărul de ecuații de echilibru scalare, independente posibile de scris, să fie egal cu numărul de necunoscute scalare din legăturile sistemului:

$$E = N$$

și aspectul calitativ ca legăturile să imobilizeze sistemul.

Întrucât grinda cu zăbrele este considerată ca un sistem de puncte materiale, numărul de ecuații de echilibru, în problema plană, este:

$$E = 2n$$

*unde **n** este numărul de noduri.*

Numărul necunoscutelor este egal cu:

$$N = r + l$$

*în care **r** este numărul de reacțiuni exterioare ale grinzii iar **l** este numărul de forțe de legătură intermediare. Dacă avem de-a face cu o grindă simplă atunci numărul de reacțiuni exterioare este egal cu trei, iar numărul forțelor de legătură intermediare este egal cu numărul de bare:*

$$N = 3 + b$$

Rezultă condiția de determinare statică:

$$2n = 3 + b$$

*Pentru grinzile simple, existența a trei reacțiuni exterioare face din acest punct de vedere grinda să trebuiască să se comporte ca un solid rigid. Aceasta înseamnă că grinda cu zăbrele trebuie să fie **indeformabilă geometric**. Să analizăm cum am putea obține o structură geometric nedeformabilă din noduri și bare. În primul rând*

considerăm o bară cu cele două noduri de la extremități. Următorul nod se poate lega de cele două noduri ale barei cu ajutorul a două bare formând un triunghi care, așa cum se cunoaște, este o figură nedeformabilă. În continuare adăugând câte un nod cu ajutorul a două bare, se va obține mereu o structură rigidă, nedeformabilă. În concluzie, dacă grinda cu zăbrele este alcătuită din alăturare de triunghiuri, atunci rezultă o structură nedeformabilă.

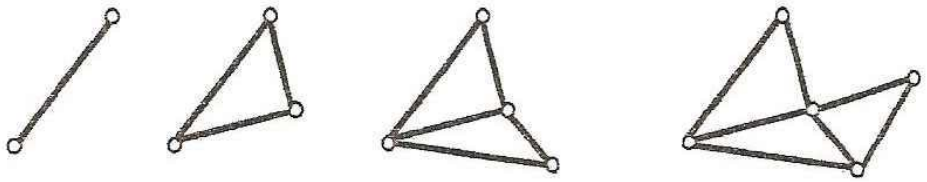


Fig.6.

7.5.Metoda izolării nodurilor.

Metodele de rezolvare ale grinzilor cu zăbrele sunt, în esență, aceleași cu metodele de rezolvare prezentate la sistemele de corpuri, dar evident adaptate pentru sistemele de puncte materiale.

Din multitudinea de metode de rezolvare ale grinzilor cu zăbrele vom prezenta în acest capitol numai două metode, dintre care cea mai cunoscută este metoda izolării nodurilor.

Această metodă se poate folosi în două variante:

*a)**Varianta generală a metodei izolării nodurilor.** Metoda are la bază proprietatea enunțată la sistemele de corpuri: dacă un sistem este în echilibru atunci toate corpurile (aici toate punctele materiale, adică nodurile) se află în echilibru. În consecință metoda este corespondentul metodei echilibrului corpurilor componente de la sistemele de corpuri. În această variantă se izolează (se separă) toate nodurile grinzii cu zăbrele și se încarcă fiecare nod cu forțele exterioare (date și reacțiuni necunoscute) și eforturile care înlocuiesc barele (și sunt perechi , egale și de sensuri opuse pe direcțiile barelor). Apoi se exprimă echilibrul fiecărui nod cu câte două ecuații de echilibru obținându-se un sistem de **2n** ecuații (**n** este numărul de noduri) cu tot atâtea necunoscute. În final rezolvând sistemul de ecuații obținut se găsesc reacțiunile și eforturile din bare.*

În general datorită numărului mare de noduri, sistemul de ecuații obținut nu poate fi rezolvat decât printr-un calcul automat. În

consecință această variantă este propice pentru programarea pe calculator. Cum se poate observa, nu este nici o restricție în folosirea acestei metode la orice tip de grindă cu zăbrele (simplă, compusă sau complexă).

*b)**Varianta simplificată a metodei izolării nodurilor.** Această variantă se utilizează pentru rezolvarea manuală a grinzilor cu zăbrele simple. Ea este de fapt metoda mixtă de rezolvare a sistemelor de corpuri adaptată pentru sistemele de puncte materiale. Astfel într-o primă etapă se calculează reacțiunile din legăturile exterioare considerând grinda ca un singur corp (teorema solidificării) și apoi în a doua etapă se exprimă, pe rând, echilibrul fiecărui nod, nodurile fiind alese astfel încât de fiecare dată să obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute.*

Pentru rezolvarea complectă a unei grinzi cu zăbrele simplă se vor parcurge următoarele etape:

- *1)Se verifică, în primul rând, condiția de determinare statică;*
- *2)Se calculează cosinușii directori ai barelor înclinate și se numerotează nodurile grinzii într-o ordine oarecare;*
- *3)Se calculează reacțiunile din legăturile exterioare considerând grinda un singur corp, adică exprimând echilibrul de ansamblu cu ajutorul a trei ecuații de echilibru. Se va efectua și verificarea rezultatelor obținute. Reacțiunile găsite se trec pe o schemă care va reprezenta **schema rezultatelor**;*
- *4)Se caută un nod cu două bare. Întotdeauna pentru grinzile simple va exista un astfel de nod deoarece ultimul nod care se leagă de restul structurii în procesul de alcătuire a sistemului geometric nedeformabil se prinde cu două bare. Acest nod se izolează și se încarcă cu forțele exterioare (toate cunoscute)iar cele două bare se înlocuiesc cu eforturi necunoscute. Pentru ca semnele rezultatelor să coincidă cu convenția de semne arătată mai înainte, eforturile necunoscute se consideră **întotdeauna** tensiuni (ies din nod, trag de nod);*
- *5)Se scriu două ecuații de echilibru și anume:*

$$\Sigma X_i = 0\,; \quad \Sigma Y_i = 0\,.$$

Reamintim că dacă unghiurile barelor înclinate sunt măsurate cu orizontala atunci proiecțiile sunt:

$$\Sigma X_i = \Sigma \text{forțelor orizontale} + \Sigma \text{forțelor înclinate} \times \cos\alpha_i$$

$\Sigma Y_i = \Sigma$ forţelor verticale + Σ forţelor înclinate x $\sin\alpha_i$

Pentru semnele proiecţiilor pe orizontală convenim că orice forţă care are sensul dirijat spre dreapta se va considera cu semnul (+) şi orice forţă dirijată spre stânga se va considera cu semnul (-).

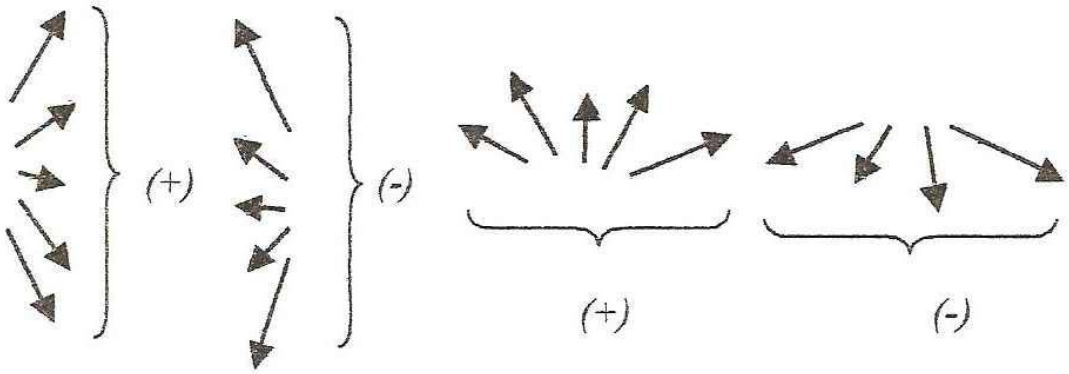


Fig.7.

Pentru proiecţiile pe verticală convenim ca toate forţele dirijate în sus să fie considerate cu semnul (+), iar forţele dirijate în jos se vor considera cu semnul (-).

Sistemul de două ecuaţii cu două necunoscute se rezolvă, se determină cele două eforturi şi se trec pe schema de rezultate. Astfel dacă efortul a rezultat pozitiv se trece ca tensiune (iese din noduri, trage de noduri), iar dacă a rezultat negativ este compresiune (adică intră în noduri sau apasă nodurile);

- *6)Se caută un nod cu două bare de efort necunoscut. Cu alte cuvinte nodul poate avea mai multe bare dar numai două bare au eforturile necunoscute. Se izolează nodul şi se încarcă cu forţe exterioare cunoscute, iar barele se înlocuiesc cu eforturi cunoscute sau necunoscute (cele necunoscute sunt tensiuni).*

După aceasta se procedează ca în etapa 5) şi apoi se continuă cu etapa 6) şi ciclul se reia până se epuizează toate nodurile;

- *7)Ultimele două noduri conţin trei ecuaţii de verificare. Aceste ecuaţii provin din faptul că au fost introduse trei ecuaţii pe ansamblu (ecuaţii dintr-o altă metodă).*

Facem precizarea că pe schema rezultatelor se poate lucra şi cu convenţia de semne acceptată pentru forţele axiale.

7.6.Exemplificare.

Problema 1. *Să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele reprezentată în figura 8.*

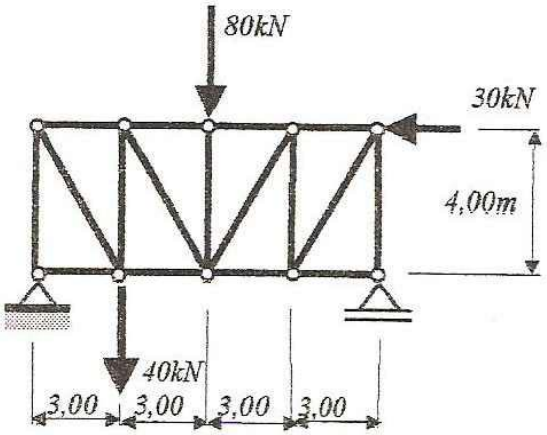


Fig.8.

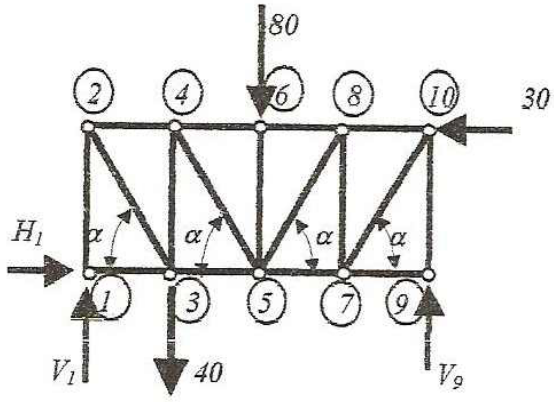
Rezolvare. *În primă etapă vom verifica dacă grinda cu zăbrele este sau nu static determinată. Pentru asta observăm că are 10 noduri şi 17 bare (4 în talpa superioară, 4 în talpa inferioară, patru diagonale şi 5 montanţi) adică:*

$$2 \cdot 10 = 3 + 17$$

De asemenea este o grindă simplă alcătuită din alăturare de triunghiuri, deci este geometric nedeformabilă şi are o articulaţie şi un reazem simplu ca legături exterioare.

Toate barele înclinate fac acelaşi unghi α cu orizontala şi pentru acesta avem:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \; ; \; \sin\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$



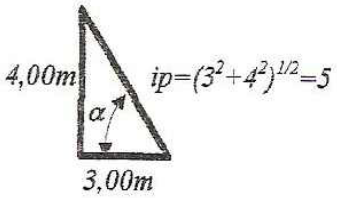


Fig.9.

Numerotăm nodurile într-o ordine oarecare şi trecem la calculul reacţiunilor din legăturile exterioare considerând întreaga grindă un singur solid rigid şi înlocuind numai legăturile exterioare (Fig.9). Ecuaţiile de echilibru pe ansamblu vor fi:

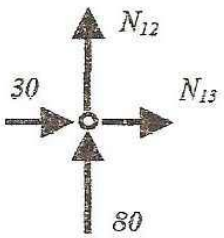
$$\Sigma X_i = 0\ ;\ H_1 - 30 = 0\ ; \longrightarrow H_1 = 30\ kN;$$
$$\Sigma M_{1i} = 0\ ;\ -40 \cdot 3 - 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + V_9 \cdot 12 = 0\ ; \longrightarrow V_9 = 40\ kN;$$
$$\Sigma M_{9i} = 0\ ;\ -V_1 \cdot 12 + 40 \cdot 9 + 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 = 0\ ; \longrightarrow V_1 = 80\ kN.$$

Vom verifica aceste reacţiuni cu ajutorul ecuaţiei:

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ V_1 - 40 - 80 + V_9 = 0\ .$$

Având toate forţele exterioare trecem acum la izolarea nodurilor. Alegem un nod cu două bare. Observăm că avem două noduri cu două bare şi anume 1 şi 9. Vom alege nodul 1 şi-l izolăm. Încărcăm nodul cu forţele exterioare (reacţiunile cunoscute din articulaţie) şi cele două bare se înlocuiesc cu eforturi necunoscute. Aşa cum am convenit eforturile necunoscute vor fi tensiuni (întinderi, ies din nod).

NODUL 1



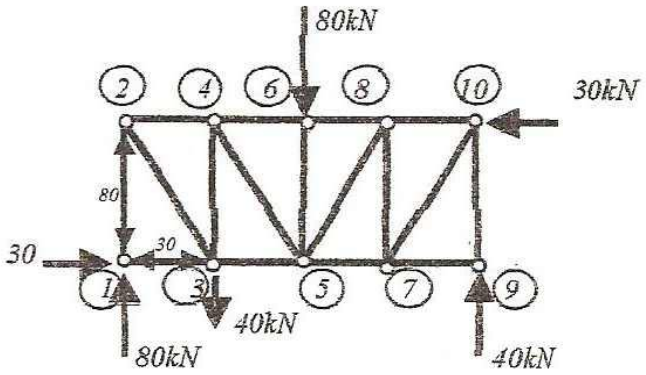


Fig.10.

Scriem pentru fiecare nod izolat două ecuaţii de echilibru şi anume:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ \Sigma Y_i = 0\ .$$

Pentru nodul 1 vom avea:

$$\begin{cases} 30 + N_{13} = 0 \\ 80 + N_{12} = 0 \end{cases}$$

Rezolvând ecuaţiile se vor obţine valorile celor două eforturi:

$$N_{13} = -30\ ;\ N_{12} = -80.$$

Cele două eforturi rezultând negative reprezintă compresiuni (intră în nod) şi se vor reprezenta pe schema de rezultate ca în figura 10. Observăm că în această modalitate de reprezentare schema nu conţine semne, semnele au fost convertite în sensuri.

În continuare vom alege un alt nod, dar de data aceasta cu două bare de

efort necunoscut. Acest nod se alege pe lângă nodurile deja rezolvate şi în cazul nostru va fi nodul 2. Izolăm acest nod şi procedăm ca mai înainte, adică încărcăm nodul cu forţe exterioare (aici nu avem), iar barele (dintre care una face unghiul α cu orizontala) se înlocuiesc cu eforturi. Eforturile cunoscute se reprezintă cu sensurile reale iar cele necunoscute vor fi tensiuni.

NODUL (2)

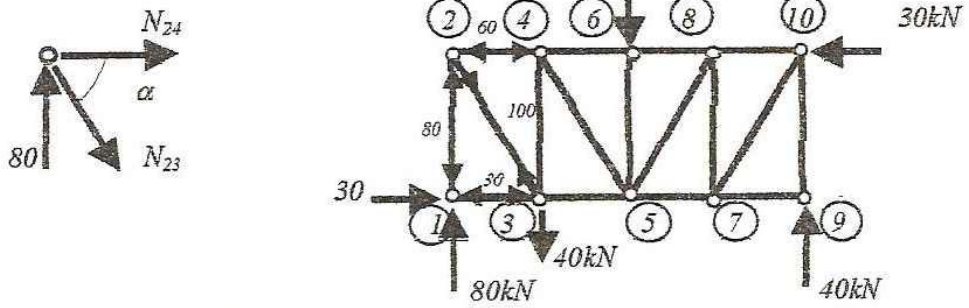


Fig.11.

Ecuaţiile de echilibru pentru acest nod vor fi:

$$\begin{cases} N_{24} + N_{23} \cdot \cos\alpha = 0 ; \\ 80 - N_{23} \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Rezolvând avem:

$N_{23} = 100;\ N_{24} = 60.$

Ambele eforturi sunt pozitive deci sunt de întindere adică se vor reprezenta pe schema rezultatelor ieşind din nod (ca în figura 11).

Următorul nod cu două bare de efort necunoscut este nodul 3.

NODUL (3)

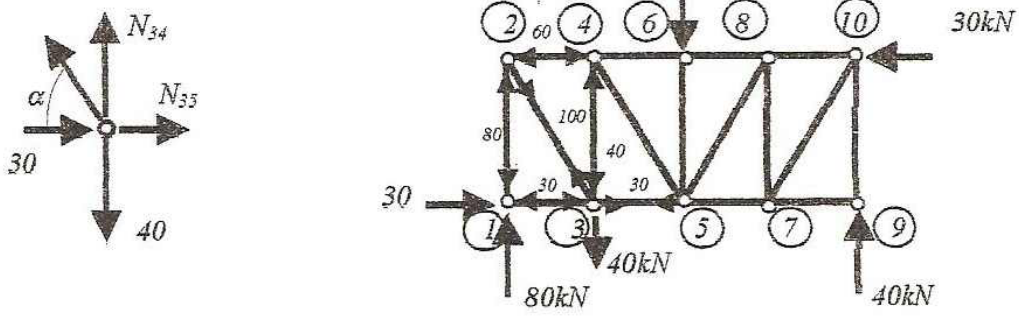


Fig.12.

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} 30 - 100 \cdot \cos\alpha + N_{35} = 0 ; \\ N_{34} - 40 + 100 \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

cu soluția:

$$N_{35} = 30 \; ; \; N_{34} = -40$$

eforturi care se reprezintă pe schema de rezultate ca în figura 12.

Următorul nod izolat va fi nodul 4.

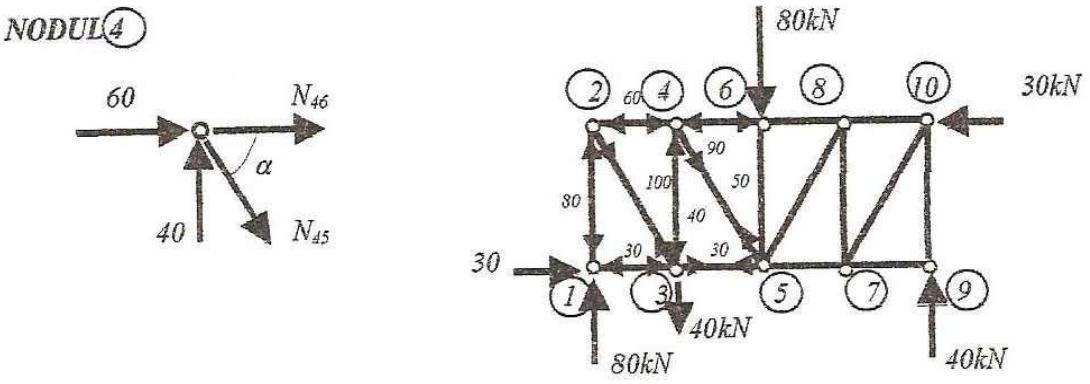


Fig.13.

Vom obține ecuațiile de echilibru:

$$\begin{cases} 60 + N_{46} + N_{45} \cdot \cos\alpha = 0 ; \\ 40 - N_{45} \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

din care rezultă eforturile:

$$N_{45} = 50 \; ; \; N_{46} = -90.$$

care se reprezintă pe schema de rezultate ca în figura 13.

Nodul următor care se izolează eset nodul 6 care are două bare de efort necunoscut și este reprezentat în figura 14. Ecuațiile de echilibru ale nodului sunt:

$$\begin{cases} 90 + N_{68} = 0 ; \\ -80 - N_{56} = 0 \end{cases}$$

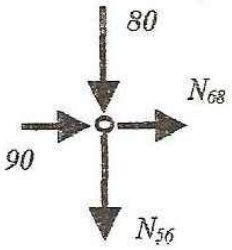
Rezolvând ecuațiile se vor obține următoarele eforturi:

$$N_{68} = -90 \; ; \; N_{56} = -80.$$

care se reprezintă pe schema de rezultate ca în figura 14.

Următorul nod cu două bare de efort necunoscut este nodul 5, reprezentat în figura 15. Vom scrie cele două ecuații de echilibru pentru acest nod și rezultă sistemul:

NODUL 6



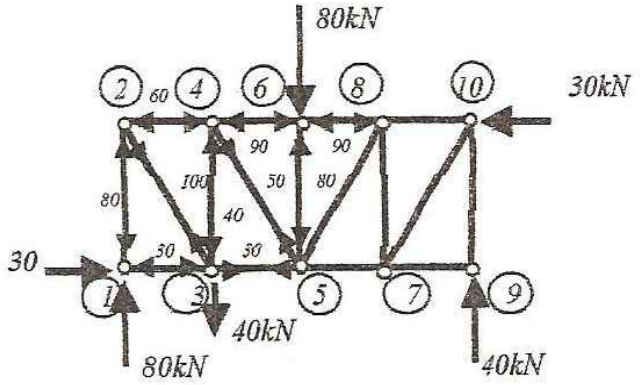
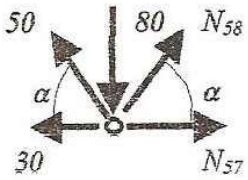


Fig.14.

NODUL 5



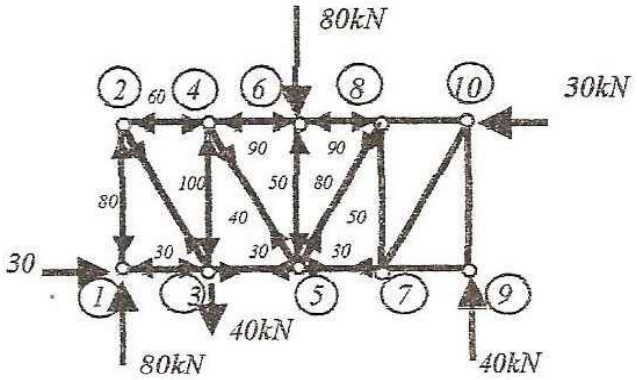
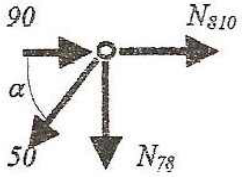


Fig.15.

NODUL 8



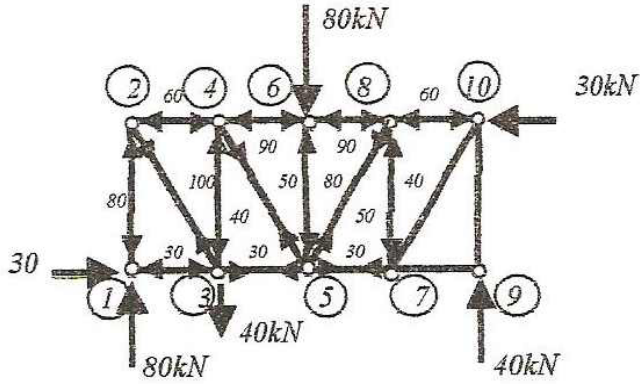


Fig.16.

$$\begin{cases} -30 - 50 \cdot \cos\alpha + N_{57} + N_{58} \cdot \cos\alpha = 0; \\ 50 \cdot \sin\alpha - 80 + N_{58} \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

având soluțiile:

$$N_{58} = 50\ ;\ N_{57} = 30$$

reprezentate în figura 15 pe schema de rezultate.

Următorul nod izolat este nodul 8 care este reprezentat în figura 16 și pentru care se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{cases} 90 - 50 \cdot \cos\alpha + N_{810} = 0\ ; \\ -50 \cdot \sin\alpha - N_{78} = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$N_{78} = -40\ ;\ N_{810} = -60.$$

Care sunt reprezentate pe schema de rezultate din figura 16. Se poate observa că în acest moment am ajuns la ultimele trei noduri, în consecință se poate alege oricare din ele pentru exprimarea echilibrului, deoarece fiecare din ele are numai două bare de efort necunoscut.

Vom alege pentru izolare nodul 7.

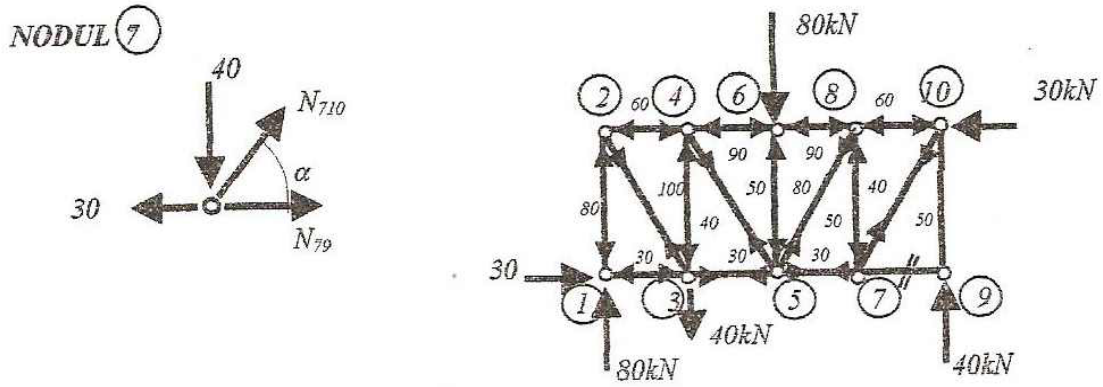


Fig.17.

Scriem ecuațiile de echilibru:

$$\begin{cases} -30 + N_{710} \cdot \cos\alpha + N_{79} = 0\ ; \\ -40 + N_{710} \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul vom găsi eforturile:

$$N_{710} = 50\ ;\ N_{79} = 0$$

care se reprezintă pe schema de rezultate. Acum se vede că ajungând la ultimele două noduri a mai rămas de determinat numai un singur efort, adică din cele patru ecuații de echilibru care se pot scrie numai o singură ecuație va fi folosită pentru rezolvare. Celelalte trei ecuații vor fi folosite pentru verificare.

Vom izola nodul 9 (reprezentat în figura 18), nod pentru care avem ecuațiile:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 40 + N_{910} = 0 \end{cases}$$

NODUL (9)

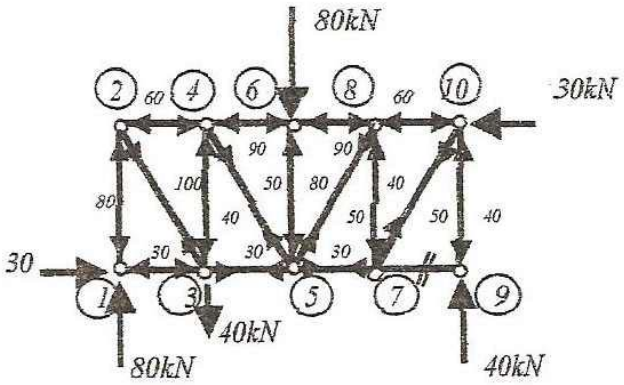


Fig.18

unde prima ecuație este de verificare iar a doua va da efortul:

$$N_{910} = -40.$$

și care reprezentat pe schema de rezultate arată că întreaga grindă este rezolvată. Ultimul nod este în totalitate de verificare. Scriem ecuațiile de echilibru care sunt:

$$\begin{cases} 60 - 50 \cdot \cos\alpha - 30 = 0; \\ -50 \cdot \sin\alpha + 40 = 0 \end{cases}$$

NODUL 10

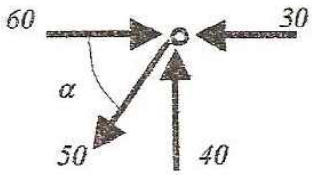


Fig.19.

și care arată că rezolvarea grinzii este corectă.

Problema 2. *Folosind metoda izolării nodurilor să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele reprezentată în figura 20.*

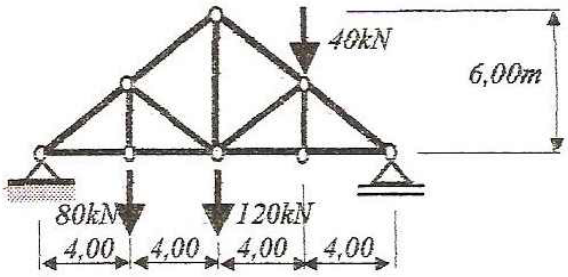


Fig.20.

7.7.Noduri cu încărcare particulară.

În anumite situații de încărcare ale nodurilor se pot determina unele din eforturile din bare fără a mai izola nodul și a exprima echilibrul acestuia. De obicei se întâlnesc șase situații de încărcare particulară ale nodurilor, dintre care trei în care rezultă și ***bare de efort nul.*** *Cele trei situații de încărcare rezultând bare de efort nul sunt:*

- *1)Nod neîncărcat cu două bare. Ambele bare au efortul nul;*
- *2)Nod cu două bare încărcat cu o forță pe direcția uneia din cele două bare. A doua bară are efortul nul iar prima (coliniară cu forța) are efortul egal cu forța exterioară și cu același efect asupra nodului;*
- *3)Nod neîncărcat cu trei bare din care două în prelungire. A treia bară are efortul nul, iar barele coliniare au același efort și cu același efect asupra nodului;*

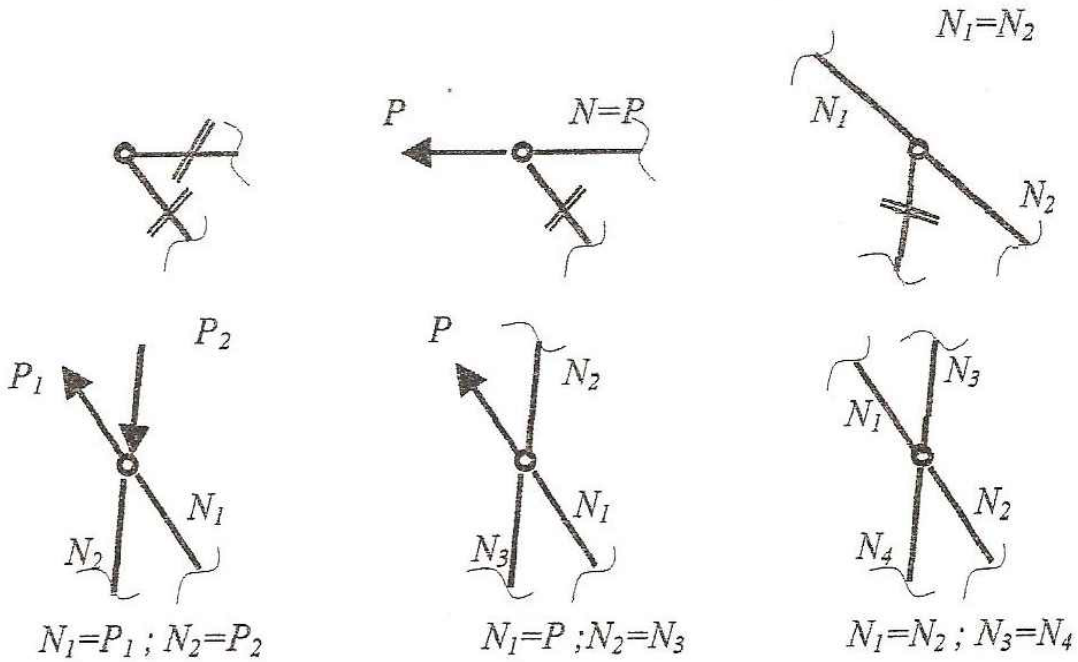


Fig.21.

- *4)Nod cu două bare încărcat cu două forțe coliniare cu cele două bare. Eforturile din bare sunt egale cu cele două forțe și cu același efect asupra nodului;*

- *5)Nod cu trei bare, din care două coliniare, încărcat cu o forță pe direcția celei de a treia bare. A treia bară are efortul egal cu încărcarea și cu același efect asupra nodului, iar cele două bare coliniare au același efort și cu același efect asupra nodului;*
- *6)Nod neîncărcat cu patru bare, două câte două coliniare. Barele coliniare au eforturi egale și cu același efect asupra nodului.*

Facem precizarea că barele de efort nul se pot considera, din punct de vedere al calculului de echilibru static, scoase (eliminate) din grinda cu zăbrele.

7.8.Metoda secțiunilor.

A doua metodă de rezolvare a grinzilor cu zăbrele studiată în acest capitol este metoda secțiunilor. Ca și metoda izolării nodurilor și această metodă se prezintă în două variante.

*a)**Varianta generalizată a metodei secțiunilor (metoda Szolga – elaborată de autorul acestei lucrări).** Această variantă este corespondentul metodei echilibrului părților pentru sisteme de corpuri cu contururi închise. În această metodă se efectuează secționarea complectă a grinzii cu zăbrele, considerată pentru suportul material ca un sistem de corpuri rigide (barele) și pentru legături , un sistem cu legături simple intermediare (barele), și se exprimă echilibrul fiecărei părți în același mod ca la sistemele de corpuri cu contururi deschise (procedeul utilizat pentru metoda mixtă). Din ecuațiile de echilibru rezultate se calculează atât reacțiunile din legăturile exterioare cât și eforturile din barele secționate.*

*b)**Varianta simplificată a metodei secțiunilor (metoda Ritter).** Această variantă a metodei secțiunilor se folosește cu deosebit succes la grinzile cu zăbrele simple și reprezintă corespondentul metodei mixte. În această variantă într-o primă etapă se determină reacțiunile grinzii ca și când ar fi un singur corp. În a doua etapă se secționează complet grinda astfel încât să fie secționate nu mai mult de trei bare de efort necunoscut. În cazul când se secționează trei bare de efort necunoscut se pune condiția ca acestea să nu fie toate trei concurente în același punct sau toate trei paralele. Se alege apoi una din cele două părți și se exprimă echilibrul ca și când această parte ar fi un singur corp. Rezultă din aceste ecuații eforturile din barele secționate.*

Pentru folosirea acestei metode se vor parcurge etapele:

- *1)Se verifică dacă grinda este static determinată;*
- *2)Se numerotează nodurile şi se calculează cosinuşii directori ai barelor înclinate în care dorim să calculăm eforturile;*
- *3)Se calculează reacţiunile din legăturile exterioare ca şi când grinda ar fi un singur corp. Remarcăm faptul că până în acest moment cele două metode în variantele simplificate sunt identice. De aici însă lucrurile diferă;*
- *4)Se efectuează o secţionare complectă (grinda se poate desface în două părţi distincte) astfel încât să nu se secţioneze mai mult de trei bare de efort necunoscut (secţionarea poate fi realizată şi prin mai multe bare dar diferenţa trebuie să fie bare cu eforturi cunoscute). Aşa cum am arătat , dacă se secţionează trei bare de efort necunoscute acestea nu trebuie să fie nici concurente toate trei în acelaşi punct şi nici paralele toate trei;*
- *5)Se alege una din cele două părţi rezultate în urma secţionării, se încarcă cu forţele exterioare (toate cunoscute) şi barele secţionate se înlocuiesc cu eforturi;*
- *6)Se scriu trei ecuaţii de echilibru ca şi când partea aleasă ar fi un singur corp. În interesul de a avea ecuaţii independente se preferă a se scrie trei ecuaţii de moment în raport cu cele trei puncte unde două câte două se intersectează direcţiile celor trei eforturi necunoscute. Dacă două eforturi necunoscute sunt paralele (la grinzile cu tălpi paralele) una din ecuaţiile de moment se înlocuieşte cu o ecuaţie de proiecţie pe direcţie perpendiculară pe direcţiile celor două eforturi paralele.*
- *7)Se rezolvă ecuaţiile obţinute;*
- *8)Se poate efectua verificarea, fie cu o ecuaţie nefolosită pe partea aleasă sau cu o ecuaţie oarecare pe cealaltă parte a grinzii rezultate după secţionare.*

7.9.Exemplificare.

***Problema** 3. Să se calculeze eforturile din barele însemnate pentru grinda cu zăbrele din figura 22.*

***Rezolvare.** Grinda este static determinată având 12 noduri şi 21 de bare:*

$$2 \cdot 12 = 3 + 21$$

şi este alcătuită prin alăturare de triunghiuri.

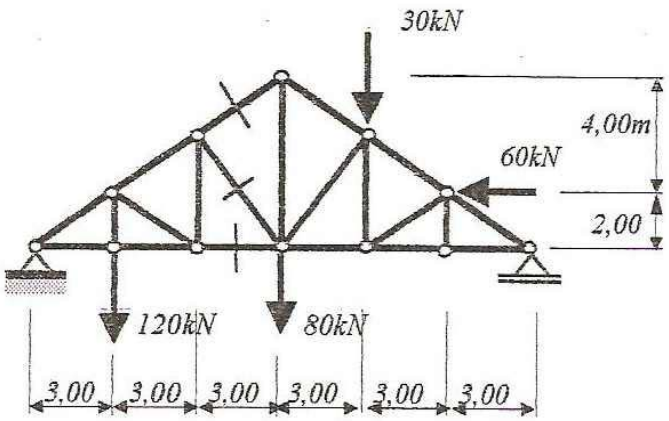


Fig.22.

Vom numerota nodurile într-o ordine oarecare şi calculăm cosinusul şi sinusul pentru unghiurile α şi β care definesc direcţiile celor două bare înclinate în care se cere determinarea eforturilor.

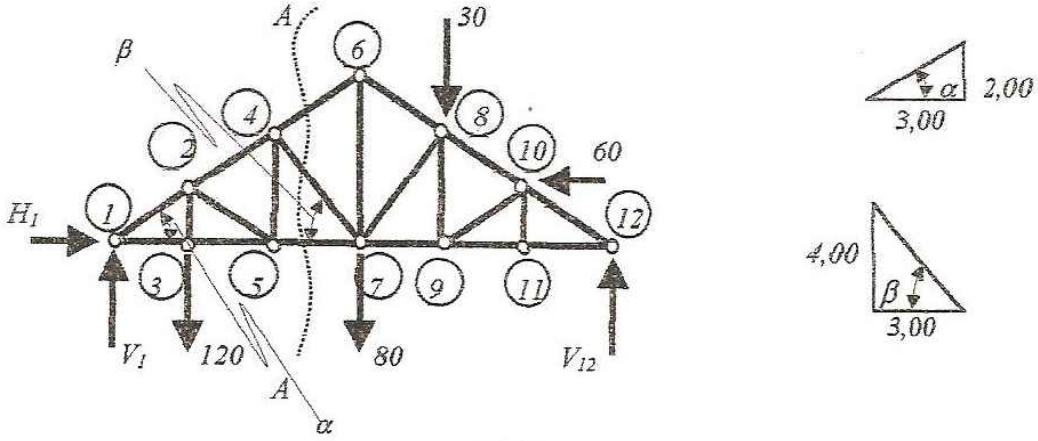


Fig.23.

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}832\ ;\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0{,}554;$$

$$\cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6\ ;\ \sin\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Vom calcula reacţiunile din legăturile exterioare cu ecuaţiile:

$\Sigma X_i = 0\ ;\ H_1 - 60 = 0;\ \longrightarrow\ H_1 = 60\ ;$

$\Sigma M_{1i} = 0; 120.3 + 80.9 + 30.12 - 60.2 - V_{12}.18 = 0\ \longrightarrow\ V_{12}=73{,}33$

$\Sigma M_{12i} = 0;\ V_1.18 - 120.15 - 80.9 - 30.6 - 60.2 = 0\ \longrightarrow\ V_1=156{,}66$

Verificarea se face folosind ecuația:

$$\Sigma Y_i = 0;\ V_1 - 120 - 80 - 30 + V_{12} = 0\ .$$

În continuare vom efectua o secționare A – A care taie cele trei bare în care se cere determinarea eforturilor, secționare care îndeplinește toate condițiile impuse , adică este completă și secționează numai trei bare de efort necunoscut care nu sunt nici paralele toate trei și nici concurente în același punct.

Pentru că partea din stânga secțiunii are mai puține forțe vom alege această parte pentru exprimarea echilibrului. Cele trei bare secționate se înlocuiesc cu eforturi necunoscute (adică tensiuni – ies din nod) și rezultă schema de forțe din figura 24.

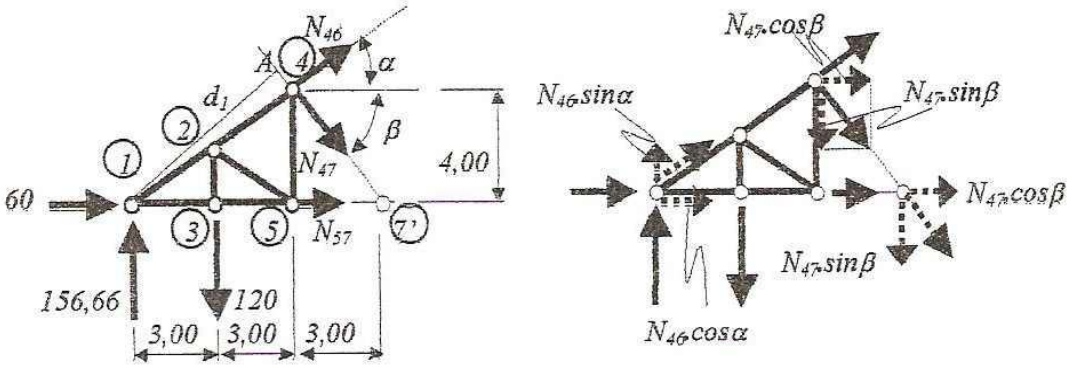


Fig.24.

Vom exprima echilibrul acestei părți , ca și când ar fi un singur corp folosind trei ecuații de echilibru. Deși aceste ecuații pot fi oarecare, vom alege aceste ecuații astfel încât eforturile să rezulte din ecuații independente, adică vom scrie trei ecuații de moment în raport cu cele trei puncte de intersecție, două câte două, ale celor trei eforturi necunoscute , adică în raport cu punctele 4, 1 și 7' . De menționat că punctul 7' are aceeași poziție în raport cu nodurile acestei părți ca și nodul 7, nod care însă se află pe partea dreaptă. Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\Sigma M_{4l} = 0\ ;\ 156{,}66\ .\ 6 - 60\ .\ 4 - 120\ .\ 3 - N_{57}\ .\ 4 = 0 \longrightarrow N_{57} = 85;$$
$$\Sigma M_{1l} = 0\ ;\ 120\ .\ 3 + N_{47}\ .\ d_1 = 0\ ;$$

În această ecuație d_1 este distanța de la nodul 1 (în raport cu care se calculează momentul și direcția efortului N_{47}. Această distanță se determină din triunghiul dreptunghic 1A7' fiind cateta opusă unghiului β. Vom avea :

$$d_1 = 9\ .\ \sin\beta = 7{,}2.$$

Înlocuind în ecuație se obține:

$$N_{47} = -50.$$

Facem precizarea că se putea calcula momentul efortului N_{47} și efectuând o descompunere în nodul 4. Cu această descompunere ecuația se putea scrie:

$$\Sigma M_{1i} = 0\ ;\ 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot \cos\beta \cdot 4 + N_{47} \cdot \sin\beta \cdot 6 = 0\ ;$$

Aceeaşi proprietate (teorema lui Varignon) se poate folosi cu mai multă eficienţă dacă se glisează efortul până ajunge cu punctul de aplicaţie pe orizontala (sau verticala) punctului în raport cu care se calculează momentul, aici în punctul 7'. Dacă descompunem aici efortul în cele două componente atunci ecuaţia devine:

$$\Sigma M_{1i} = 0\ ;\ 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot \sin\beta \cdot 9 = 0\ ;$$

ecuaţie care este de fapt aceeaşi ca şi prima modalitate de exprimare a echilibrului în raport cu nodul 1.

Ultima ecuaţie independentă de echilibru a părţii considerate un singur corp şi de asemenea considerând efortul N_{46} cu punctul de aplicaţie în nodul 1(unde se descompune în cele două componente) este:

$$\Sigma M_{7'i} = 0\ ;\ 156{,}66 \cdot 9 + N_{46} \cdot \sin\alpha \cdot 9 - 120 \cdot 6 = 0 \longrightarrow N_{46} = -138{,}37.$$

Problema 4. *Folosind metoda secţiunilor să se calculeze eforturile din barele însemnate pentru grinda cu zăbrele din figura 25.*

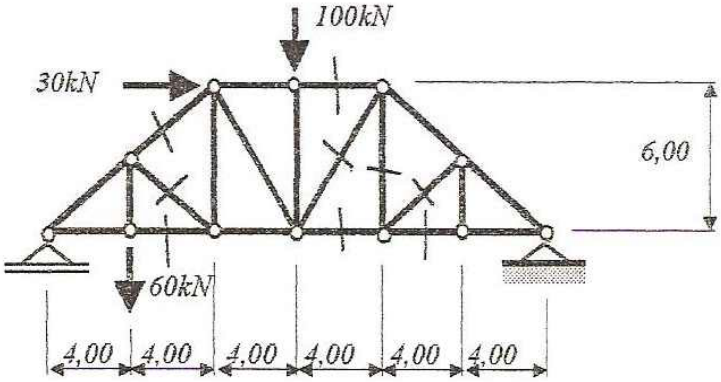


Fig.25.

CINEMATICA

Capitolul 8. Cinematica punctului material.

8.1. Introducere.

Aşa cum am prezentat în capitolul introductiv la acest curs, ***cinematica*** *este acea parte a* ***mecanicii teoretice*** *care se ocupă cu studiul mişcării mecanice fără a ţine seama de mase şi forţe, adică studiază geometria mişcării. Reamintim de asemenea că prin mişcare mecanică vom înţelege schimbarea poziţiei unui corp (sau o parte dintr-un corp) în raport cu alte corpuri considerate repere (sau sisteme de referinţă).*

Sistemul de referinţă *poate fi fix sau mobil. Dacă mişcarea se efectuează în raport cu un sistem de referinţă fix (sau care poate fi considerat fix) vom spune că mişcarea este* ***absolută****, iar dacă se efectuează în raport cu un sistem mobil mişcarea se va numi* ***relativă****. Elementele mişcării absolute se vor nota cu indicele* ***a*** *, iar cele ale mişcării relative cu* ***r****. Facem însă precizarea că în cazul în care într-o problemă studiem numai mişcarea absolută vom renunţa la indicele care notează această mişcare.*

De asemenea trebuie subliniat faptul că elementele mişcării absolute pot fi raportate la un sistem de referinţă mobil, iar cele ale mişcării relative la un sistem de referinţă fix.

Sistemele de referinţă utilizate în această parte a mecanicii teoretice vor fi în consecinţă: ***sistemul cartezian*** *care în general va fi considerat sistem fix (cu trei puncte fixe),* ***sistemul cilindric*** *cu o axă fixă (cu două puncte fixe),* ***sistemul sferic*** *care are un punct fix (originea sistemului) şi* ***triedrul lui Frenet*** *care este sistemul fără puncte fixe.*

Fără a mai consacra un capitol special noţiunilor principale ale cinematicii vom structura această parte a mecanicii în capitolele: ***cinematica punctului în mişcare absolută, cinematica solidului***

rigid în mişcare absolută, cinematica mişcării relative a punctului şi cinematica sistemelor de corpuri (mecanisme).

În capitolul de faţă vom studia din punct de vedere cinematic (fără a considera efectele forţelor şi maselor) mişcarea absolută a punctului material.

În cinematica punctului se ridică două probleme: prima este de a cunoaşte poziţia punctului în orice moment al mişcării şi a doua este aceea de a cunoaşte cum se produce mişcarea.

Pentru definirea poziţiei avem posibilitatea de a folosi o cale vectorială care se va utiliza în special în demonstraţiile teoretice şi una scalară care se va folosi în aplicaţii.

Pentru definirea modului de mişcare vom introduce două noţiuni vectoriale : ***viteza şi acceleraţia.***

Facem precizarea că deşi în acest capitol se studiază numai mişcarea absolută a punctului, în exprimarea acestei mişcări vom folosi şi sistem de referinţă mobile.

8.2.Poziţia punctului. Traiectorie.

Aşa cum am arătat , poziţia punctului se poate exprima vectorial sau scalar.

În primul caz pentru definirea poziţiei se foloseşte ***vectorul de poziţie*** *, care în cazul mişcării absolută trebuie să fie în raport cu un punct fix.*

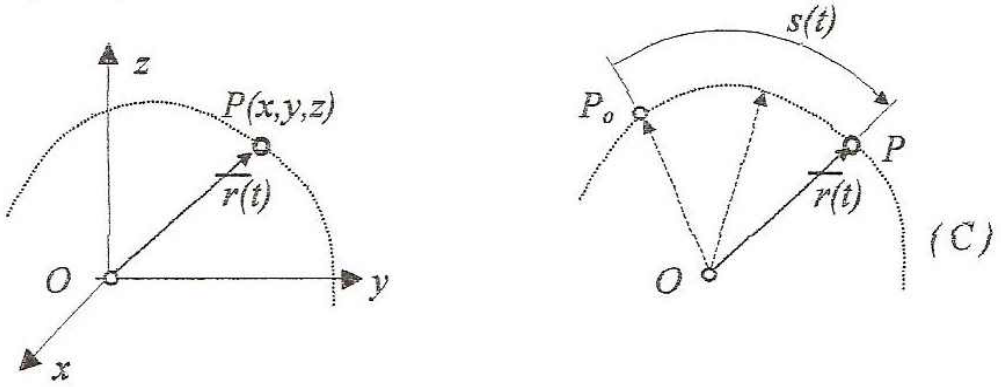


Fig.1.

Dat fiind faptul că punctul se află în mişcare (îşi modifică poziţia în timp) vectorul de poziţie este o funcţie de timp:

$$\overline{r} = \overline{r}(t)$$

Această funcție de timp, pentru a descrie o mișcare reală, va îndeplini următoarele condiții: este continuă (punctul material nu poate efectua salturi instantanee), uniformă (punctul nu poate ocupa simultan mai multe poziții) și derivabilă.

Dacă urmărim să definim poziția punctului cu mărimi scalare, cunoaștem că în raport cu un sistem de referință, de exemplu cel cartezian (singurul sistem de referință folosit până în acest moment în capitolele precedente), poziția unui punct se poate exprima cu ajutorul a trei coordonate (trei parametrii scalari de poziție). Aceste coordonate sunt de asemenea funcții de timp și îndeplinesc de asemenea aceleași condiții ca și vectorul de poziție:

$$x = x(t);\ y = y(t)\ ;\ z = z(t)$$

Este evident că între exprimarea vectorială a poziției și cea scalară avem relația de legătură:

$$\overline{r}(t) = x(t).\overline{i} + y(t).\overline{j} + z(t).\overline{k}$$

Poziția punctului se mai poate exprima însă și în alt mod și anume: se definește curba (C) pe care se mișcă punctul și apoi se definește poziția punctului prin distanța parcursă de punct, pe această curbă, în raport cu un reper de pe ea. Curba pe care se mișcă punctul se numește ***traiectorie*** *și se definește ca fiind* ***locul geometric al pozițiilor ocupate succesiv de punct în mișcare.*** *Observând că toate pozițiile aflate pe traiectorie se pot defini cu ajutorul vectorului de poziție, definiția mai poate fi enunțată și ca* ***locul geometric (sau înfășurătoarea) vârfurilor vectorului de poziție.***

Dacă parametrului timp i se dă o valoare bine definită, vectorul de poziție sau coordonatele punctului vor marca o anumită poziție a punctului în spațiu. Această poziție se numește ***poziție instantanee*** *(sau la un moment dat). Una din pozițiile instantanee importante în studiul mișcării este poziția inițială corespunzând momentului de start (de începere) al mișcării.*

8.3. Viteza şi acceleraţia.

Să considerăm un punct material P în mişcare pe o traiectorie oarecare. La momentul t al mişcării poziţia lui va fi definită de vectorul de poziţie $\overline{r(t)}$. *La momentul* t_1 :

$$t_1 = t + \Delta t$$

poziţia punctului va fi definită de vectorul de poziţie:

$$\overline{r_1} = \overline{r(t_1)} = \overline{r(t + \Delta t)} = \overline{r} + \overline{\Delta r}$$

unde am notat cu $\overline{\Delta r}$ *variaţia vectorului de poziţie în intervalul de timp* Δt.

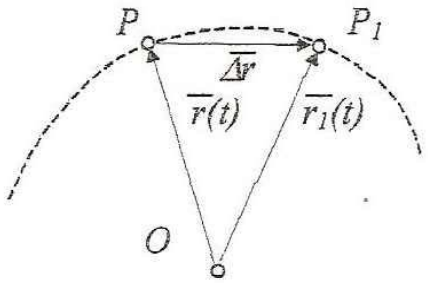


Fig.2.

Vom considera acum mărimea vectorială definită de relaţia:

$$\overline{v_m} = \frac{\overline{\Delta r}(t)}{\Delta t}$$

Această mărime se numeşte **viteză medie.** *Constatăm că acest vector nu descrie corect (decât în unele cazuri particulare) modul de mişcare a punctului. De exemplu dacă considerăm o mişcare circulară iar intervalul de timp este egal cu cel necesar parcurgerii complecte a unei circumferinţe constatăm că viteza medie ar rezulta zero, ceia ce este total fals. În consecinţă acest raport dintre variaţia vectorului de poziţie şi intervalul de timp corespunzător este o caracteristică a mişcării numai dacă intervalul de timp este foarte mic (tinde spre zero). În acest caz se obţine mărimea vectorială:*

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Această mărime vectorială se numeşte ***viteză instantanee*** *(sau la un moment dat) şi se defineşte ca:* ***derivata de ordinul unu în raport cu timpul a vectorului de poziţie al punctului.***

Pentru simplificarea notaţiilor privind derivatele în raport cu timpul se convine ca acestea să fie notate cu un punct deasupra funcţiei derivate:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}$$

Pentru simplificarea denumirilor în aplicaţii viteza instantanee va fi denumită simplu numai ***viteză.*** *Facem precizarea că vom folosi şi denumirea de viteză instantanee dar această denumire se va folosi pentru a determina efectiv viteza la un moment dat.*

Să considerăm acum din nou punctul material în cele două poziţii corespunzătoare celor două momente : t şi t_1. Deoarece vitezele instantanee sunt diferite , este necesar, pentru a cunoaşte modul de mişcare al punctului, să mai introducem o noţiune care să pună în evidenţă variaţia vitezei. Această noţiune se obţine considerând vitezele instantanee ale punctului în cele două poziţii aduse într-un acelaşi punct. Variaţia vitezei instantanee (ca vector) în intervalul de timp scurs raportată la intervalul de timp este mărimea vectorială:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

care se numeşte ***acceleraţie medie.*** *Întrucât această mărime nu descrie fidel modul de mişcare se trece la micşorarea intervalului de timp astfel încât*

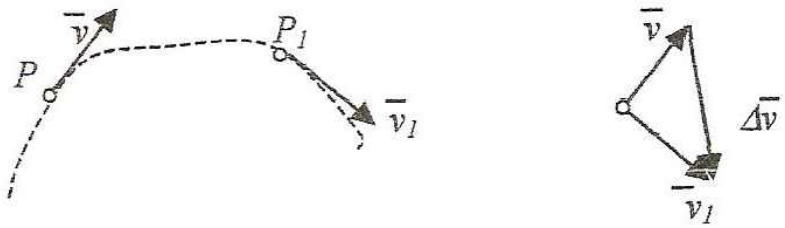


Fig.3.

în final se obține ***accelerația instantanee:***

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$$

având definiția: ***derivata de ordinul unu în raport cu timpul a vitezei punctului sau derivata de ordinul doi în raport cu timpul a vectorului de poziție a punctului.***

Cum se observă derivatele de ordinul doi în raport cu timpul se notează cu două puncte așezate deasupra funcției care se derivează.

8.4. Cinematica punctului în coordonate carteziene.

Așa cum am prezentat anterior, mișcarea absolută a unui punct material poate fi studiată în raport cu diferite sisteme de referință. Cel mai simplu sistem utilizat este ***sistemul cartezian****, considerat în general ca un* ***sistem fix.***

Presupunem un punct material în mișcare (absolută) și sistemul cartezian fix Oxyz.

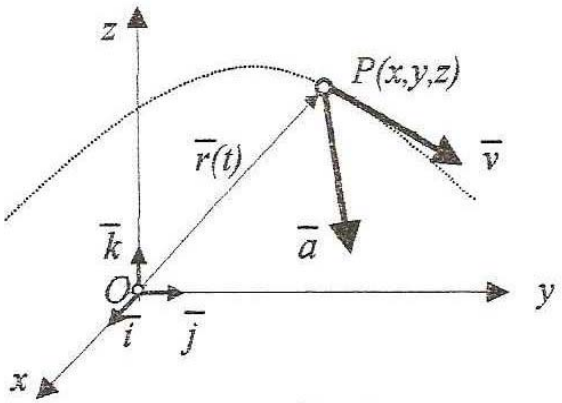


Fig.4.

Caracteristica acestui sistem este faptul că versorii celor trei axe sunt vectori constanți , adică:

$$\dot{\bar{i}} = \dot{\bar{j}} = \dot{\bar{k}} = 0.$$

Poziția punctului se poate defini fie scalar cu ajutorul coordonatelor:

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ ;\ z = z(t)$$

care sunt funcții de timp deoarece punctul se mișcă și deci își schimbă poziția în raport cu reperul considerat (care este fix).

Aceste coordonate se mai numesc și ***legile mișcării în coordonate carteziene*** *sau* ***ecuațiile parametrice ale mișcării.***

Poziția punctului material, la un moment dat, mai poate fi definită și vectorial, cu ajutorul vectorului de poziție în raport cu originea sistemului de referință:

$$\overline{r} = \overline{r}(t)$$

Între exprimarea scalară și vectorială a poziției punctului putem scrie relația binecunoscută:

$$\overline{r}(t) = x(t).\ \overline{i} + y(t).\ \overline{j} + z(t).\ \overline{k}$$

Dacă se elimină parametrul timp (t) din cele trei ecuații ale mișcării se obțin două relații scalare de forma:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0\ ; \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

care reprezintă ecuațiile ***traiectoriei*** *punctului în coordonate carteziene. Observăm că traiectoria este definită ca intersecție a două suprafețe fixe.*

Pentru cunoașterea modului în care se efectuează mișcarea vom exprima mai întâi viteza punctului. Astfel folosind definiția vitezei instantanee găsim:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\ \overline{i} + \frac{dy}{dt}.\ \overline{j} + \frac{dz}{dt}.\ \overline{k}$$

sau folosind notațiile consacrate:

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}}(t) = \dot{x}(t)\ .\ \overline{i} + \dot{y}(t)\ .\ \overline{j} + \dot{z}(t)\ .\ \overline{k}$$

Aceasta înseamnă că vom avea proiecțiile vitezei pe axele sistemului de referință:

$$v_x = \dot{x}\ ;\ v_y = \dot{y}\ ;\ v_z = \dot{z}$$

din care se obțin cu ajutorul relațiilor binecunoscute mărimea și direcția vitezei:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ;\ \cos\alpha_v = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};$$

$$\cos\beta_v = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};\ \cos\gamma_v = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

Observăm că proiecțiile vitezei pe axele fixe sunt egale cu derivatele de ordinul unu în raport cu timpul a coordonatelor corespunzătoare.

De asemenea remarcăm faptul că în coordonate carteziene, deși calculul se poate efectua cu ușurință, nu se pun în evidență proprietăți ale vitezei.

Al doilea vector ce definește modul de mișcare al unui punct material este accelerația. Prin definiție se obține derivând viteza (funcția viteză) punctului:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}}$$

sau înlocuind în funcție de coordonatele carteziene se obține în final:

$$\bar{a} = \ddot{x}(t)\,.\,\bar{i} + \ddot{y}(t)\,.\,\bar{j} + \ddot{z}(t)\,.\,\bar{k}$$

adică avem următoarele proiecții pe axe , mărime și direcție în coordonate carteziene:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x\ ;\ a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y\ ;\ a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z\ ;$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2}\ ;$$

$$\cos\alpha_a = \frac{x}{|\bar{a}|} \; ; \; \cos\beta_a = \frac{y}{|\bar{a}|} \; ; \; \cos\gamma_a = \frac{z}{|\bar{a}|}$$

Rezultă că : proiecțiile acceleraței punctului pe axele fixe sunt egale cu derivatele de ordinul doi în raport cu timpul a coordonatelor corespunzătoare, sau derivatele de ordinul unu în raport cu timpul a proiecțiilor vitezei pe axele corespunzătoare.

Şi aici se observă că deşi se pot calcula cu uşurință proiecțiile şi caracteristicile acceleraței, sistemul cartezian nu pune în evidență nici o proprietate a acceleraței.

8.5. Cinematica punctului în coordonate cilindrice. Coordonate polare.

Fie un punct material în mişcare absolută. Pentru exprimarea mişcării vom folosi un sistem de referință care se alege astfel:

-axa Oz este fixă şi o vom considera , pentru simplificare, verticală;

-axa Oρ numită şi ***axă radială*** *se consideră astfel încât punctul să fie conținut , tot timpul mişcării, în planul ρOz. Această axă (de fapt planul ρOz) se află în mişcare şi anume o rotație în jurul axei fixe Oz;*

-axa On numită ***axă normală*** *va fi perpendiculară pe planul ρOz şi cu sensul luat astfel încât să rezulte un sistem de referință drept.*

Caracteristica acestui sistem este că dacă versorul axei fixe Oz este constant:

$$\bar{k} = 0$$

versorii axelor mobile, notate cu $\bar{i}_\rho$ *şi* $\bar{i}_n$ *sunt funcții de timp:*

$$\bar{i}_\rho = \bar{i}_\rho(t) \; ; \; \bar{i}_n = \bar{i}_n(t).$$

Poziția punctului în raport cu acest sistem de referință se va defini complet cu ajutorul a două coordonate: ρ şi z (punctul se află în

planul ρOz).

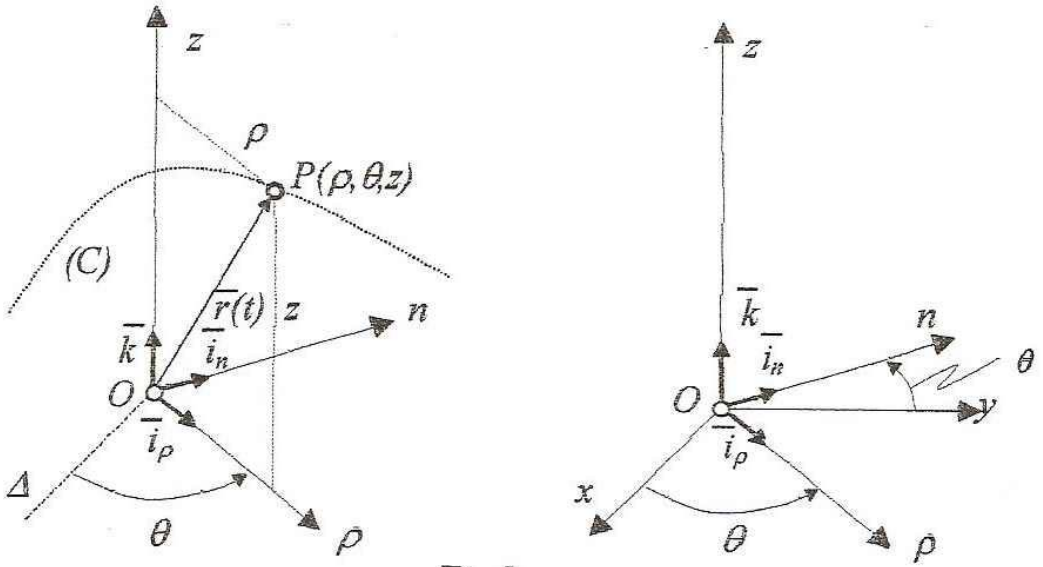


Fig.5.

Dar pentru definirea poziției punctului în spațiu este nevoie să definim și poziția sistemului de referință în raport cu un reper fix. Acest lucru se realizează dacă se cunoaște unghiul θ dintre un plan fix (de exemplu planul ΔOz) și planul mobil ρOz. Rezultă că poziția punctului material se obține scalar cu următoarele trei mărimi scalare:

$$\rho = \rho(t) \; ; \; \theta = \theta(t) \; ; \; z = z(t)$$

care se numesc ***coordonate cilindrice*** *sau* ***ecuațiile de mișcare în coordonate cilindrice****, iar sistemul de referință Oρnz se numește* ***sistemul cilindric de coordonate.***

Vectorial poziția punctului este definită de vectorul de poziție în raport cu punctul fix O (se studiază mișcarea absolută):

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

Între coordonatele cilindrice și vectorul de poziție există relația:

$$\bar{r}(t) = \bar{\rho}(t) \cdot \bar{i}_\rho(t) + z(t) \cdot \bar{k}$$

Dacă se elimină parametrul timp din ecuațiile

parametrice ale mişcării se obţin două relaţii :

$$f(\rho,\theta,z) = 0 \; ; \; g(\rho,\theta,z) = 0$$

reprezentând ecuaţiile traiectoriei în coordonate cilindrice.

Pentru definirea modului de mişcare vom avea nevoie de derivatele versorilor axelor mobile. Pentru acest lucru vom exprima aceşti vectori în funcţie de un sistem fix de referinţă (de exemplu sistem cartezian Oxyz cu axa Ox coliniară cu dreapta Δ). Se obţin:

$$\bar{i}_\rho(t) = \cos\theta(t) \cdot \bar{i} + \sin\theta(t) \cdot \bar{j};$$
$$\bar{i}_n(t) = -\sin\theta(t) \cdot \bar{i} + \cos\theta(t) \cdot \bar{j}$$

Derivând aceşti doi vectori se găseşte în final:

$$\dot{\bar{i}}_\rho = -\dot{\theta}.\sin\theta \cdot \bar{i} + \dot{\theta}.\cos\theta \cdot \bar{j} = \dot{\theta}\bar{i}_n$$
$$\dot{i}_n = -\dot{\theta}.\cos\theta \cdot \bar{i} - \dot{\theta}.\sin\theta \cdot j = \theta i_\rho$$

Acum să calculăm viteza punctului folosind relaţia de definiţie:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \rho \cdot \dot{\bar{i}}_\rho + \dot{z} \cdot \bar{k}$$

care prin înlocuire devine :

$$\bar{v} = \dot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{i}_n + \dot{z} \cdot \bar{k}$$

Proiecţiile , mărimea şi direcţia vitezei în coordonate cilindrice vor fi:

$$v_\rho = \dot{\rho} \; ; \; v_n = \rho\dot{\theta} \; ; \; v_z = \dot{z} \; ; \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} \; ;$$
$$\cos\alpha_v = \frac{\dot{\rho}}{|\bar{v}|} \; ; \; \cos\beta_v = \frac{\rho\dot{\theta}}{|\bar{v}|} \; ; \; \cos\gamma_v = \frac{\dot{z}}{|\bar{v}|}$$

Acceleraţia punctului se va obţine derivând încă o dată în raport cu timpul , viteza:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\rho} \cdot \bar{i}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\bar{i}}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{i}_n + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \bar{i}_n + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\bar{i}}_n + \ddot{z} \cdot \bar{k}$$

După înlocuirea derivatelor versorilor şi gruparea termenilor corespunzători axelor sistemului vom avea:

$$a = (\rho - \rho\theta^2)\, i_\rho + (2\rho\theta + \rho\theta)\, i_n + z\, k$$

adică proiecţiile pe cele trei axe, mărimea şi direcţia acceleraţiei în coordonate cilindrice sunt:

$$a_\rho = \rho - \rho\theta^2 \,;\; a_n = 2\rho\theta + \rho\theta \,;\; a_z = z \,;$$
$$a = \sqrt{(\rho - \rho\theta^2)^2 + (2\rho\theta + \rho\theta)^2 + z^2} \,;$$
$$\cos\alpha_a = \frac{\rho - \rho\theta^2}{|a|} \,;\; \cos\beta_a = \frac{2\rho\theta + \rho\theta}{|a|} \,;\; \cos\gamma_a = \frac{z}{|a|}$$

În cazul în care punctul material efectuează o mişcare plană (traiectoria punctului se află într-un plan fix), prin alegerea convenabilă a sistemului de referinţă relaţiile se pot simplifica. Considerând axa Oz perpendiculară pe planul mişcării adică făcând pe z=0, sistemul de referinţă devine ***sistemul polar****. Acest sistem are originea în punctul fix O iar axa Oρ se alege astfel încât punctul material să se găsească tot timpul mişcării pe această axă. Rezultă :*

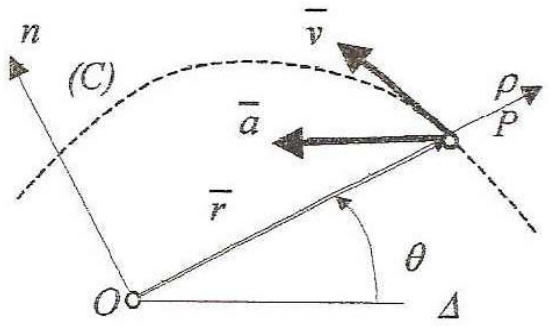


Fig.6.

$$\bar{r}(t) = r \cdot \bar{i}_\rho$$

adică studiul mişcării punctului în coordonate polare se obţine făcând în relaţiile precedente :

$$\rho = r \,;\; z = 0.$$

-coordonatele polare:

$r = r(t)\ ;\ \theta = \theta(t);$

-ecuația traiectoriei în coordonate polare:

$f(r, \theta) = 0;$

-viteza în coordonate polare:

$\bar{v} = \dot{r} \cdot \bar{i}_\rho + r \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{i}_n\ ;$

-accelerația în coordonate polare:

$\bar{a} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2)\bar{i}_\rho + (2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta})\bar{i}_n$

8.6. Cinematica punctului în triedrul lui Frenet.

Acest sistem de referință, numit și sistemul natural, se folosește în cazurile în care este cunoscută traiectoria punctului.

Să presupunem un punct material P în mișcare pe o traiectorie cunoscută (C).

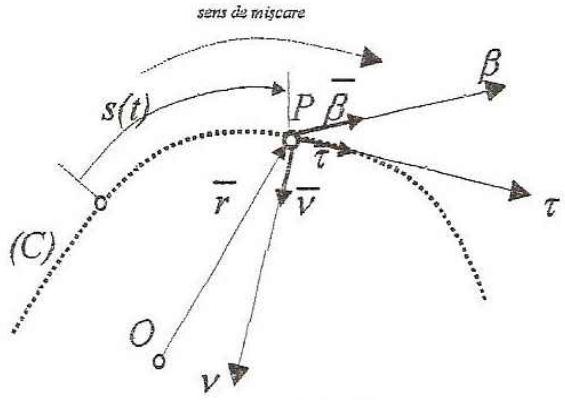


Fig.7.

Vom considera sistemul de referință în modul următor:
-originea sistemului este chiar punctul P în mișcare;

-axa $P\tau$ se alge tangentă la traiectorie în punctul P şi cu sensul pozitiv în sensul mişcării punctului;

-axa $P\nu$ numită axa normală şi având direcţia normalei principale în punctul P la traiectorie. Sensul axei este spre centrul de curbură;

-axa $P\beta$ numită axă binormală este perpendiculară pe primele două axe şi are sensul ales astfel încât să formeze un triedru drept.

Deoarece punctul se află în originea acestui sistem şi în consecinţă notaţiile axelor nu se folosesc pentru definirea poziţiei punctului în raport cu sistemul, vom folosi notaţiile axelor pentru versorii lor. Astfel notăm aceşti versori:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(t) \; ; \; \bar{\nu} = \bar{\nu}(t) \; ; \; \bar{\beta} = \bar{\beta}(t).$$

Poziţia punctului definită scalar se poate exprima cu o singură mărime scalară care se alege a fi :

$$s = s(t)$$

coordonata curbilinie (numită şi coordonată naturală sau lege orară de mişcare) reprezentând spaţiul parcurs pe traiectorie. Este de fapt lungimea arcului de la o poziţie convenabil aleasă până la poziţia curentă şi reprezintă legea spaţiului pe traiectorie.

Întrucât studiem mişcarea absolută a punctului, pentru definirea vitezei şi acceleraţiei punctului avem nevoie de vectorului de poziţie în raport cu un punct fix O. Acest vector se va presupune a depinde de timp prin intermediul coordonatei curbilinii:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(s(t))$$

Prin definiţie avem pentru viteza punctului:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}(s(t)) = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \dot{s}$$

Pentru a vedea ce reprezintă derivata vectorului de poziţie în raport cu coordonata curbilinie să considerăm două poziţii apropiate ale punctului P şi P'.

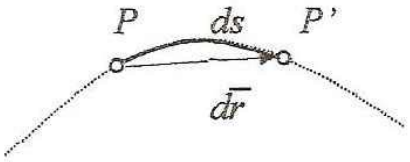


Fig.8.

Se remarcă faptul că $d\bar{r}$ este coarda iar ds este arcul dintre cele două poziții. La limită acestea tind să fie egale în mărime (rezultă că această derivată este un versor) iar $d\bar{r}$ tinde ca direcție spre direcția tangentei în punctul P. Avem deci:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$$

Această relație se numește ***prima relație a lui Frenet.***
Dacă înlocuim în expresia vitezei se obține :

$$\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}$$

adică proiecțiile vitezei, mărime și direcția sunt date de :

$$v_\tau = \dot{s} = v \; ; \; v_\nu = 0 \; ; \; v_\beta = 0$$

Avem următoarele proprietăți ale vitezei punctului:

- *Mărimea vitezei este întotdeauna derivata de ordinul unu în raport cu timpul a legii spațiului pe traiectorie;*
- *Viteza este întotdeauna tangentă la traiectorie;*
- *Viteza este întotdeauna în sensul mișcării.*

Pentru calculul accelerației vom folosii definiția:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \dot{s} \cdot \dot{\bar{\tau}}$$

Pentru calculul derivatei versorului tangentei vom presupune că și această funcție depinde de timp prin intermediul coordonatei naturale:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(s(t))$$

Vom obține:

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \dot{s}$$

Acum pentru calculul derivatei versorului tangentei în raport cu coordonata curbilinie vom considera din nou cele două poziții succesive P și P'.

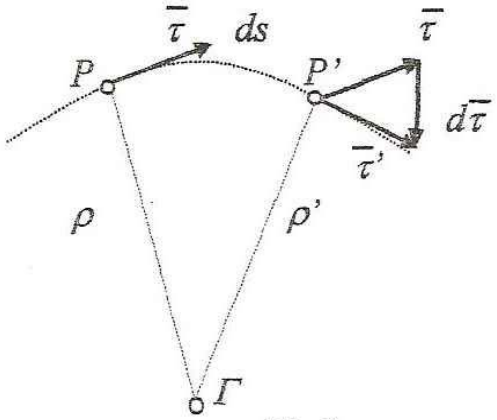


Fig.9.

Notăm versorii tangentei în cele două poziții $\bar{\tau}$ și $\bar{\tau}'$. Normalele pe versorii tangentei se intersectează în centrul de curbură , iar distanțele sunt egale cu razele de curbură corespunzătoare. Dacă ds tinde spre zero se poate considera că PP'Γ este un triunghi isoscel. Aducând unul din versorii tangentei în punctul de aplicație al celuilalt versor (de exemplu $\bar{\tau}$ se aduce în P') rezultă vectorul diferență $d\bar{\tau}$. S-a format și aici un triunghi isoscel asemenea triunghiului PP'Γ, deci putem scrie relația:

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$

Observând că la limită $d\bar{\tau}$ este perpendiculară pe direcția tangentei rezultă în final:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\nu}$$

care reprezintă ***a doua relație a lui Frenet.***

Înlocuim în expresia acceleraţiei şi vom găsi:

$$\bar{a} = \ddot{s}\cdot\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\cdot\bar{\nu}$$

adică vom avea proiecţiile acceleraţiei pe axele sistemului:

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}\,;\; a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}\,;\; a_\beta = 0.$$

Vom avea proprietăţile :

- *Acceleraţia se situează întotdeauna în planul osculator (planul tangentei şi normalei principale) şi are două componente: una tangenţială şi alta normală.*
- *Componenta tangenţială se datoreşte variaţiei mărimii vitezei iar cea normală variaţiei direcţiei vitezei.*
- *Singura mişcare ce se poate efectua cu acceleraţie nulă este mişcarea rectilinie şi uniformă.*

Mărimea acceleraţiei va fi:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}\,;$$

iar direcţia în raport cu normala principală :

$$tg\varphi = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{\ddot{s}}{\frac{\dot{s}^2}{\rho}} = \frac{\dot{v}\rho}{v^2}$$

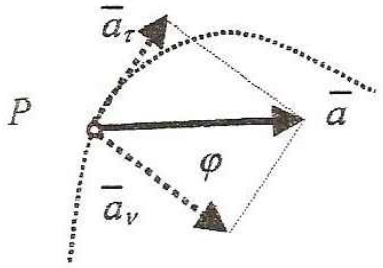


Fig.10.